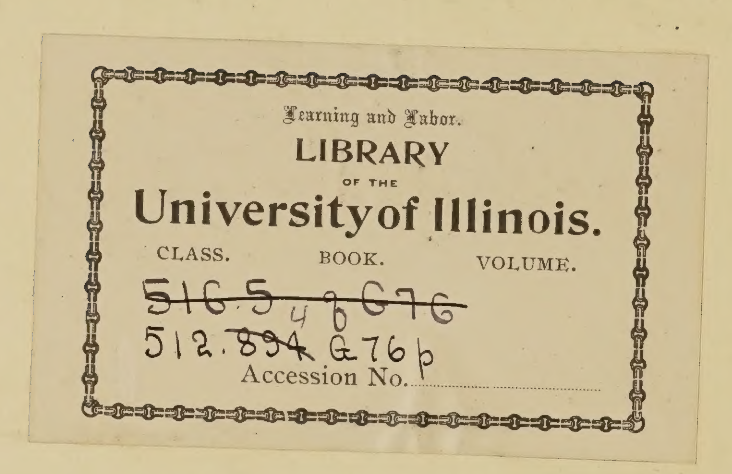
512.4
G76p


Learning and Labor.
LIBRARY
OF THE
University of Illinois.
CLASS. BOOK. VOLUME.
~~516.5~~ 4 ~~q G76~~
512.~~894~~ G76p
Accession No.

UNIVERSITY OF
ILLINOIS LIBRARY
AT URBANA-CHAMPAIGN
MATHEMATICS

LIBRARY U. OF I., URBANA-CHAMPAIGN



PUNKTRECHNUNG UND PROJEKTIVE GEOMETRIE

ERSTER TEIL: PUNKTRECHNUNG

VON

HERMANN GRASSMANN

SEPARATABZUG AUS DER FESTSCHRIFT DER LATINA

ZUR

ZWEIHUNDERTJÄHRIGEN JUBELFEIER DER UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG 1894.

Martin Schilling
Verlagsbuchhandlung
Halle a. S.

512.8947
G76p

Erster Abschnitt.

Addition und Subtraktion von Punkten und Strecken.

Um die Punkte des Raumes direkt, ohne Zuhülfenahme von Koordinaten, der Rechnung unterwerfen zu können, denke man sich einen jeden Punkt e dargestellt als das Produkt aus einem Zahlfaktor $\mathfrak{m}$, welcher die Masse des Punktes heifsen mag, und einem zweiten Faktor a, der die Lage des Punktes im Raum angiebt. Dieser Lagenfaktor a möge der zu dem Punkte e gehörende einfache Punkt, e selbst aber ein vielfacher Punkt genannt werden. Die Beifügung eines Massenfaktors $\mathfrak{m}$ nämlich verleiht dem Punkte den Charakter einer Gröfse, indem sie ihn der Vermehrung und Verminderung fähig macht. Zunächst freilich erstreckt sich diese Verknüpfungsfähigkeit nur auf Punkte, welche demselben einfachen Punkte zugehören. Zwei solche Punkte $e_1 = \mathfrak{m}_1 a$ und $e_2 = \mathfrak{m}_2 a$ erscheinen als gleichbenannte Zahlen und können daher wie diese addiert und subtrahiert werden. So wird man unter der Summe

$$e_1 + e_2 = \mathfrak{m}_1 a + \mathfrak{m}_2 a$$

nichts anderes zu verstehen haben als den Punkt

$$(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) a,$$

d. h. man erhält für die Summe zweier vielfachen Punkte gleichen Ortes einen Punkt desselben Ortes, dessen Masse gleich der Massensumme der Summandenpunkte ist.

Für die Addition zweier der Lage nach verschiedener Punkte indes, welche als ungleich benannte Gröfsen aufzufassen sind, bedarf es einer besonderen Erklärung, bei deren Wahl man nur dafür Sorge zu tragen hat, dafs

erstens die Grundeigenschaften der Addition in möglichst weitem Umfange erhalten bleiben, und dafs

zweitens beim Übergange zu Summanden von gleicher Lage die neue Art der Addition in die oben dargestellte Addition kongruenter Punkte übergeht.

Wir knüpfen diese Erklärung an den Begriff des Schwerpunktes. Wir fassen nämlich die Massenfaktoren $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ der beiden zu addierenden Punkte $e_1 = \mathfrak{m}_1 a_1$ und $e_2 = \mathfrak{m}_2 a_2$ als Massen im Sinne der Mechanik auf und verstehen unter der Summe $\mathfrak{m}_1 a_1 + \mathfrak{m}_2 a_2$ beider Punkte ihren mit der Gesamtmasse

1) . . . . $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$

belasteten Schwerpunkt. Bezeichnen wir daher noch den mit dem Schwerpunkt zusammenfallenden einfachen Punkt mit s, so lautet die Definitionsgleichung der Summe zweier vielfachen Punkte

2) . . . . $\mathfrak{m}_1 a_1 + \mathfrak{m}_2 a_2 = \mathfrak{m} s,$

66333
Mathematics 10 Je 04 STECHERT 1.25
39904

wo $\mathfrak{m}$ durch die Gleichung 1) bestimmt ist, und der Punkt s die Verbindungslinie der Punkte a_1 und a_2 im umgekehrten Verhältnisse ihrer Massen teilt (vgl. Fig. 1).

Durch diese Erklärung wird man sicher der zweiten von den oben gestellten Forderungen gerecht, da wirklich bei der Anwendung auf kongruente Punkte die neue Addition in die oben dargestellte Addition gleichnamiger Punkte übergeht. Man erfüllt aber auch die erste Forderung, nach welcher die neue Verknüpfung den Grundeigenschaften der Addition entsprechen soll, denn erstens ist das Ergebnis der Verknüpfung mit den verknüpften Gröfsen gleichartig, und

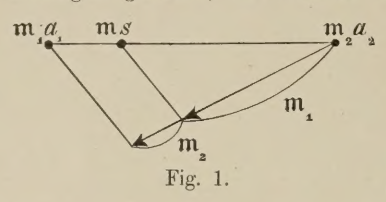


Fig. 1.

zweitens genügt die Verknüpfung den beiden Grundgesetzen der Addition, dem kommutativen Gesetze

3) . . . . $e_1 + e_2 = e_2 + e_1$

und dem associativen Gesetze

4) . . . . $e_1 + (e_2 + e_3) = (e_1 + e_2) + e_3$.

In der That folgt die Gültigkeit der ersten Formel direkt aus dem Begriffe des Schwerpunktes, die der zweiten aus dem bekannten Satze, dafs 3 Punkte nur einen Schwerpunkt besitzen.

Die Differenz zweier Punkte wird in gewöhnlicher Weise auf die Summe zurückgeführt. Aus den Gleichungen

$$\mathfrak{m}_1 a_1 + \mathfrak{m}_2 a_2 = \mathfrak{m}s \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}$$

ergeben sich durch Auflösung nach den beiden ersten Summanden $\mathfrak{m}_1 a_1$ und $\mathfrak{m}_1$ die Gleichungen

5) . . . . $\mathfrak{m}_1 a_1 = \mathfrak{m}s - \mathfrak{m}_2 a_2$ und

6) . . . . $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} - \mathfrak{m}_2$,

welche aussagen:

Die Differenz zweier Punkte $\mathfrak{m}s$ und $\mathfrak{m}_2 a_2$ ist wiederum ein Punkt, dessen Masse $\mathfrak{m}_1$ die Differenz der Massen des Minuendus und Subtrahendus ist, und dessen Ort a_1 durch Umkehrung der Summenkonstruktion in Fig. 1 gefunden wird (vgl. Fig. 2).

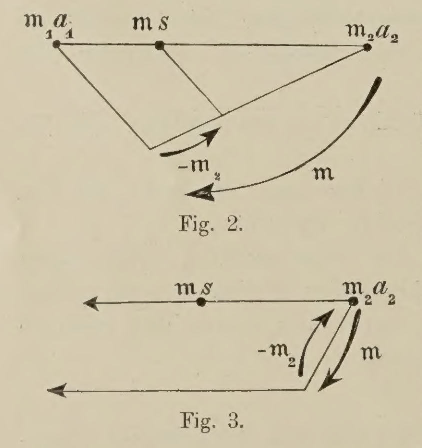


Fig. 3.

Eine besondere Betrachtung erfordert noch der Fall, wo die Masse $\mathfrak{m}$ des Minuendus der Masse $\mathfrak{m}_2$ des Subtrahendus gleich ist. Alsdann ergiebt die Konstruktion einen in unendlicher Entfernung auf der Verbindungslinie der Punkte a_2 und s liegenden Punkt (vgl. Fig. 3), welcher der Gleichung 6) zufolge die Masse 0 hat. Durch dies Hinausrücken in unendliche Ferne und das gleichzeitige Verschwinden seiner Masse erhält nun aber dieser Punkt — wir wollen ihn das unendlich ferne Punktbild der Differenz nennen — eine Unbestimmtheit, welche der Differenz selbst nicht anhaftet, und welche ihn daher zu ihrer Gröfsendarstellung untauglich macht. Um dies einzusehen, nehme man auf einer Geraden drei einfache Punkte a, b und b_1 an und bilde aus ihnen die

Differenzen $b - a$ und $b_1 - a$. Einer jeden von ihnen entspricht dann der mit der Masse 0 behaftete unendlich ferne Punkt der Geraden ab, und es sind also die Punktbilder der beiden Differenzen vollkommen gleich, während doch die Differenzen selbst unzweifelhaft ungleiche Gröfsen sind, da

die eine, $b - a$, bei der Vermehrung um a den Punkt b,
die andere, $b_1 - a$, „ „ „ „ „ „ „ b_1

ergiebt. Es ist also wirklich das (unendlich ferne) Punktbild der Differenz gleichmassiger Punkte zur Gröfsendarstellung dieser Differenz ungeeignet.

Um zu einer brauchbaren Darstellung zu gelangen, setze man für den Augenblick die Differenz

7) . . . . $b - a = k$,

dann wird nach dem Begriffe der Differenz

8) . . . . $b = a + k$,

und diese Gleichung zeigt, dafs die Addition der Differenz $k = b - a$ den einfachen Punkt a in den um die Strecke ab entfernt liegenden einfachen Punkt b überführt. Dem Punkte a gegenüber erweist sich also der Summand $k = b - a$ als eine Verschiebungsgröfse, und es fragt sich nur, ob seine Addition auch bei jedem andern einfachen Punkte c eine gleich grofse Verschiebung hervorruft. Um diese Frage entscheiden zu können, hat man zunächst noch den allgemeinen Begriff der Summe $c + k = c + (b - a)$ festzustellen, da die oben gegebene Erklärung der Addition der Punkte auf eine solche Summe keine Anwendung finden kann. Es erscheint als das natürlichste, diese Erklärung an die Forderung zu knüpfen, dafs auch hier wieder das associative Gesetz erhalten bleiben solle, die neue Art der Addition also geradezu durch die Gleichung zu definieren

9) . . . . $c + (b - a) = (c + b) - a$.

Bezeichnet man daher die gesuchte Summengröfse $c + (b - a)$ mit d, so wird vermöge 9)

10) . . . . $d = (c + b) - a$,

wofür man nach dem Begriffe der Differenz auch schreiben kann

11) . . . . $a + d = c + b$.

Diese Gleichung aber besagt:

Die gesuchte Summengröfse d ist derjenige Punkt, welchen man zu a addieren mufs, um den Schwerpunkt von c und b, d. h. den mit der Masse 2 belasteten Mittelpunkt m der Linie cb, zu erhalten. Darin aber liegt:

Der Punkt d besitzt, ebenso wie die Punkte a, b und c, die Masse 1 und bildet die vierte Ecke des Parallelogramms mit den Seiten ab und ac (vgl. Fig. 4).

Fig. 4.

Der Punkt d geht also wirklich aus dem Punkte c durch eine Verschiebung parallel und gleich der Strecke ab hervor. Die oben aufgeworfene Frage, ob der Summand $b - a$ bei jedem einfachen Punkte c eine gleich grofse Verschiebung bewirkt, ist also zu bejahen, und man erhält den Satz:

Durch Addition der Differenz $b - a$ erfährt jeder beliebige einfache Punkt c eine Verschiebung parallel und gleich der Strecke ab.

Man kann daher die Strecke ab, falls man an ihr nur die Länge, die Richtung und den Sinn, nicht aber auch die Linie festhält, in der sie liegt, geradezu als das geometrische Bild der Differenz $b - a$ ansehen, und wir stellen daher die Erklärung auf:

Unter der Differenz $b - a$ zweier einfachen Punkte b und a soll die *Strecke* ab verstanden werden, diese Strecke gerechnet vom Subtrahendus a nach dem Minuendus b hin.

Die Brauchbarkeit dieser Erklärung giebt sich sogleich dadurch zu erkennen, dafs sie als unmittelbaren Ausflufs die bekannte Strecken-Addition und -Subtraktion ergiebt. Für zwei stetig aneinanderstofsende Strecken, welche durch Differenzen von der Form $b - a$ und $c - b$ dargestellt werden, erhält man nämlich sofort die Gleichung

12) . . . . $(b - a) + (c - b) = c - a$

und damit den Satz:

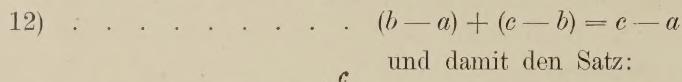
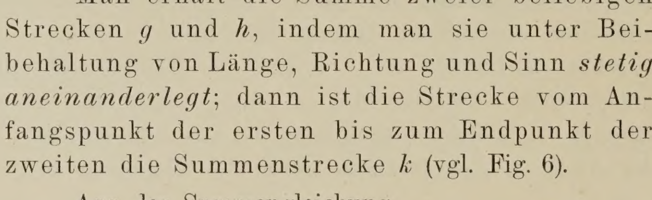


Fig. 5.

„Die Summe zweier stetig aneinanderstofsenden Strecken ist gleich der Strecke vom Anfangspunkt der ersten bis zum Endpunkt der zweiten“ (vgl. Fig. 5).

Und aus ihm folgt wieder wegen der Verschiebbarkeit der Strecken der allgemeinere Satz:

Man erhält die Summe zweier beliebigen Strecken g und h, indem man sie unter Beibehaltung von Länge, Richtung und Sinn *stetig aneinanderlegt*; dann ist die Strecke vom Anfangspunkt der ersten bis zum Endpunkt der zweiten die Summenstrecke k (vgl. Fig. 6).



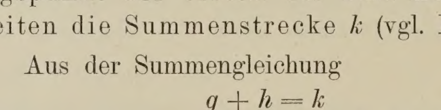


Fig. 6.

Aus der Summengleichung

$$g + h = k$$

ergiebt sich endlich noch durch Auflösung nach dem zweiten Summanden h die Gleichung

$$h = k - g,$$

in welcher der Satz liegt:

Man erhält die Differenz zweier Strecken, indem man sie unter Beibehaltung von Länge, Richtung und Sinn *mit ihren Anfangspunkten aneinanderlegt*, dann ist die Strecke vom Endpunkte des Subtrahendus bis zum Endpunkte des Minuendus die gesuchte Differenzstrecke.

Zum Schlusse dieser Entwickelungsreihe möge endlich noch die Differenz zweier gleichmassigen vielfachen Punkte $\mathfrak{m}b - \mathfrak{m}a$ gedeutet werden. Nach dem distributiven Gesetze wird

13) . . . . $\mathfrak{m}b - \mathfrak{m}a = \mathfrak{m}(b - a);$

man erhält daher den Satz:

Die Differenz zweier $\mathfrak{m}$-fachen Punkte ist das $\mathfrak{m}$-fache der Differenz der entsprechenden einfachen Punkte, d. h. also eine Strecke, welche nach Richtung und Sinn mit der Verbindungsstrecke $b - a$ der beiden Punkte übereinstimmt, deren Länge sich aber zu dieser wie $\mathfrak{m} : 1$ verhält.

Zweiter Abschnitt.
Die äufsere Multiplikation.

Man kann sich nun aber weiter auch die Aufgabe stellen, den analytischen Ausdruck für ein Linienstück zu ermitteln, an welchem nicht nur wie bei der Strecke die Gröfse, die Richtung und der Sinn, sondern wie bei einer Kraft, die an einem starren Körper angreift, auch noch die gerade Linie festgehalten wird, welcher das Linienstück angehört, so dafs es also diese gerade Linie auch ihrer Lage im Raume nach charakterisiert. Für die rechnerische Darstellung eines solchen Linienstücks — es möge im Gegensatz zur Strecke ein „Stab"*) genannt werden — reichen die bisher entwickelten analytischen Hülfsmittel, nämlich die Addition und Subtraktion von Punkten und Strecken, noch nicht aus, und wir versuchen es daher mit einer Art der Multiplikation, die wir durch Einschliefsung des Produktes in „scharfe" Klammern von der gewöhnlichen Multiplikation der Algebra unterscheiden und als äufsere Multiplikation bezeichnen wollen. Ist also C ein Stab, a sein Anfangs-, b sein Endpunkt, und sind beide Punkte als einfache Punkte aufgefafst, so setzen wir das Produkt

14) . . . . $[ab] = C.$

Um den multiplikativen Charakter dieser neuen Verknüpfung festzulegen, bestimmen wir, sie solle der Addition gegenüber distributiv sein, d. h. es sollen die Gleichungen bestehen

15) . . . . . . $\begin{cases} [a(b+c)] = [ab] + [ac] \quad \text{und} \\ [(b+c)a] = [ba] + [ca]. \end{cases}$

Aus diesen Formeln folgt dann ohne weiteres, dafs die äufsere Multiplikation auch der Subtraktion gegenüber distributiv ist, dafs also auch die Formeln gelten

16) . . . . . . $\begin{cases} [a(b-c)] = [ab] - [ac] \\ [(b-c)a] = [ba] - [ca]; \end{cases}$

denn ersetzt man etwa auf der rechten Seite der ersten Formel die Gröfse b durch die Summe $(b-c)+c$, so erhält man

$$\begin{aligned}[ab] - [ac] &= [a((b-c)+c)] - [ac], \quad \text{d. h. nach 15)} \\ &= [a(b-c)] + [ac] - [ac] \\ &= [a(b-c)].\end{aligned}$$

Die Formeln 15) und 16) liefern ferner bei der Anwendung auf kongruente und gleichmassige Punkte b und c die Spezialformeln

17) . . . . $\begin{cases} [a \cdot 2b] = 2[ab] \\ [2b \cdot a] = 2[ba] \quad \text{und} \end{cases}$ $\begin{cases} [a \cdot 0] = 0 \\ [0 \cdot a] = 0. \end{cases}$

---

*) Der von meinem Vater gebrauchte Ausdruck „Linienteil" hat sich nicht recht einbürgern wollen. E. Budde nennt in seiner Mechanik (Berlin, G. Reimer, 1890—91) den Stab einen „linienflüchtigen Vektor". H. Hankel und E. Müller benutzen den Ausdruck „Geradenstück" (vgl. H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlen, Leipzig, 1867, und E. Müller, Die Liniengeometrie nach den Prinzipien der Grafsmann'schen Ausdehnungslehre, in den „Monatsheften für Math. und Phys." II. Jahrg. Wien, 1891, und derselbe, Neue Methode zur Ableitung der statischen Gesetze, in den „Mitteilungen des K. K. technologischen Gewerbemuseums in Wien", Neue Folge, III. Jahrg. Wien, 1893).

Bei wiederholter Anwendung der Formeln 15) und 16) endlich ergeben sich zunächst für ganze Werte eines Zahlfaktors $\mathfrak{n}$, dann vermöge der gewöhnlichen Schlufsweise auch für gebrochene Werte von $\mathfrak{n}$ die allgemeineren Formeln

$$18) \quad \begin{cases} [a \cdot \mathfrak{n}b] = \mathfrak{n}[ab] \\ [\mathfrak{n}b \cdot a] = \mathfrak{n}[ba]^{*)}, \end{cases}$$

welche aussagen, dafs in einem äufseren Produkt ein Zahlkoeffizient eines Faktors auch vor das ganze Produkt gestellt werden darf.

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen 15) ist nicht schwer zu erkennen. Sie definieren nämlich, falls b und c einfache Punkte sind, die Addition von Stäben mit gemeinsamem Anfangspunkte, und zwar genau im Sinne der Mechanik. Bezeichnet man nämlich wie oben den Mittelpunkt zwischen den Punkten b und c mit m, setzt also

$$b + c = 2m,$$

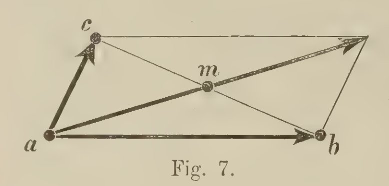


Fig. 7.

so läfst sich die erste Gleichung 15) mit Rücksicht auf 18) in der Form schreiben

$$2[am] = [ab] + [ac],$$

in der sie besagt (vgl. Fig. 7):

Die Summe zweier Stäbe mit gemeinsamem Anfangspunkt ist wieder ein Stab, nämlich die von diesem Anfangspunkte ausgehende Diagonale des durch die beiden Summandenstäbe bestimmten Parallelogramms.

Indes genügt die neue Art der Produktbildung keineswegs sämtlichen Gesetzen der algebraischen Multiplikation. Dies erkennt man am deutlichsten, wenn man die beiden Grenzpunkte eines Stabes C in einen einzigen Punkt zusammenrücken läfst, so dafs der Stab die Länge Null erhält und daher selbst $= 0$ gesetzt werden mufs; dann verwandelt sich die Gleichung 14) in die neue Gleichung

$$19) \quad [aa] = 0,$$

welche wir als die Grundformel der äufseren Multiplikation bezeichnen wollen, da sie die besondere Eigentümlichkeit des äufseren Produktes im Gegensatz zum algebraischen besonders scharf hervortreten läfst. Sie zeigt nämlich, dafs das äufsere Produkt nicht nur verschwindet, wenn ein Faktor null ist, sondern auch, wenn seine beiden Faktoren einander gleich werden. Ja es verschwindet sogar schon, wenn seine Faktoren nur einander kongruent sind; denn nach der ersten Formel 18) wird auch

$$20) \quad [a \cdot \mathfrak{n}a] = 0,$$

falls $\mathfrak{n}$ eine Zahl bedeutet.

Die Gleichung 19) verdient den Namen einer Grundformel der äufseren Multiplikation um so mehr, als sich aus ihr noch eine weitere wichtige Eigenschaft des äufseren Produktes ableiten läfst, durch welche dieses ebenfalls von dem algebraischen Produkte geschieden wird. Ersetzt man nämlich in der Grundformel 19) den Punkt a durch die Summe zweier Punkte b und c, so erhält man die Gleichung

$$[(b + c)(b + c)] = 0.$$

---

*) Für den Fall, dafs der Zahlfaktor $\mathfrak{n}$ irrational ist, können die Gleichungen 18) als Definitionsgleichungen gelten.

Diese aber verwandelt sich, wenn man unter Wahrung der Faktorenfolge ausmultipliziert und zugleich beachtet, dafs wegen 19) die Produkte $[bb]$ und $[cc]$ verschwinden, in

$$[cb] + [bc] = 0 \quad \text{oder in}$$

21) . . . . $[cb] = -[bc]$,

worin der Satz liegt:

Ein äufseres Produkt ändert sein Zeichen, wenn man seine beiden Faktoren miteinander vertauscht,

oder geometrisch ausgedrückt:

Bei Umkehrung seines Sinnes nimmt ein Stab den entgegengesetzten Wert an.

Die Formeln 15) bis 21) zeigen bereits eine vollkommene Analogie zwischen den Gesetzen der äufseren Multiplikation und denen der Determinanten. Diese Analogie wird noch vervollständigt, wenn man beachtet, dafs wegen der Distributivität der äufseren Multiplikation auch

22) . . . . $[a(b + \mathfrak{n}a)] = [ab]$

ist, worin der Satz liegt:

Ein äufseres Produkt ändert seinen Wert nicht, wenn man einen Faktor um ein Vielfaches des andern vermehrt.

Da die soeben betrachtete Veränderung eines Faktors des äufseren Produktes für dessen Umwandlung und geometrische Deutung von hervorragender Wichtigkeit ist, wollen wir sie mit einem besonderen Namen belegen und diese Benennung sogleich auch auf Produkte von mehr als 2 Faktoren ausdehnen. Sobald nämlich ein Faktor eines Produktes um beliebige Vielfache der andern Faktoren vermehrt wird, wollen wir sagen, es sei jener Faktor einer „linealen Änderung“ unterworfen. Der Grund für diese Bezeichnung springt in dem vorliegenden Beispiel sofort in die Augen, denn alle Punkte $b + \mathfrak{n}a$, welche sich aus dem Faktor b durch lineale Änderung ableiten lassen, liegen auf der nämlichen Geraden ab. Bei Einführung dieser neuen Benennung läfst sich dann der durch die Formel 22) ausgedrückte Satz auch in der Form aussprechen:

Das äufsere Produkt zweier Punkte verhält sich invariant gegenüber linealen Änderungen seiner Faktoren.

Aus der Gleichung 22) entspringt noch eine besonders wichtige Spezialformel, wenn man dem Zahlfaktor $\mathfrak{n}$ den besonderen Wert -1 verleiht; dadurch nämlich geht sie über in die Formel

23) . . . . $[a(b - a)] = [ab]$,

welche den analytischen Zusammenhang zwischen der Strecke $b - a$ und dem Stabe $[ab]$ zur Anschauung bringt, indem sie zeigt, dafs der Stab $[ab]$ aus „seiner Strecke“ $b - a$ dadurch abgeleitet werden kann, dafs man diese mit dem Anfangspunkt a des Stabes als erstem Faktor äufserlich multipliziert (mit a „vormultipliziert“). Diese Bezeichnung kann dazu dienen, den Begriff des Stabes näher auszugestalten, doch mufs man vorher noch ein wenig auf das äufsere Produkt zweier Strecken eingehen.

Zunächst bedingt es die Distributivität der äufseren Multiplikation, dafs die Grundformel 19) und die von ihr abhängende Formel 20) auch für Strecken fortbestehen, dafs also auch für eine Strecke h die Gleichungen gelten

24) . . . . $[hh] = 0$ und

25) . . . . $[h \cdot \mathfrak{n}h] = 0$,

welche aussagen, dafs das äufsere Produkt paralleler Strecken verschwindet. Stellt man nämlich die Strecke h als Punktdifferenz dar, setzt somit etwa

$$h = b - a, \text{ so wird}$$
$$\begin{aligned}[hh] &= [(b-a)(b-a)] \\ &= -[ab] - [ba] \\ &= [ba] - [ba] \\ &= 0,\end{aligned}$$

d. h. die Grundformel der äufseren Multiplikation gilt auch für Strecken. Aus der Grundformel aber und dem distributiven Gesetze folgten alle übrigen Formeln der äufseren Multiplikation; also bleiben auch sie sämtlich bestehen, wenn man anstatt der Punktfaktoren Strecken setzt. Insbesondere wird für 2 Strecken h und k wieder

26) . . . . $[kh] = -[hk]$,

und ebenso gilt die Formel der linealen Änderung:

27) . . . . $[h(k + \mathfrak{n}h)] = [hk]$.

Dies Gesetz der linealen Änderung bleibt übrigens offenbar auch dann noch erhalten, wenn der eine Faktor des Produktes ein Punkt und der andere eine Strecke ist; so wird, falls a einen Punkt und h eine Strecke bezeichnet,

28) . . . . $[ah] = [(a + \mathfrak{n}h)h]$.

Diese Formel benutzen wir jetzt, um die linke Seite der Gleichung 23) umzugestalten. Es wird

$$[ab] = [a(b-a)] = [(a + \mathfrak{n}(b-a))(b-a)]$$

oder, wenn man die Bezeichnung einführt

$$*)\ a_1 = a + \mathfrak{n}(b-a),$$

29) . . . . $[ab] = [a_1(b-a)]$.

Hier ist wegen der Willkürlichkeit des Zahlkoeffizienten $\mathfrak{n}$ der Faktor a_1 ein ganz beliebiger Punkt auf der durch den Stab $[ab]$ bestimmten Geraden, nämlich derjenige einfache Punkt, welcher aus a durch eine Verschiebung um das $\mathfrak{n}$-fache der Strecke $b-a$ entsteht. Die Gleichung 29) enthält daher den Satz:

Der Stab $[ab]$ kann aus der Strecke $b-a$ auch dadurch abgeleitet werden, dafs man sie mit einem beliebigen einfachen Punkte a_1 der durch den Stab $[ab]$ bestimmten Geraden „vormultipliziert“.

Bezeichnet man ferner noch denjenigen einfachen Punkt, welcher aus a_1 durch Verschiebung um die Strecke $b-a$ hervorgeht, mit b_1, setzt also

$$b_1 = a_1 + (b-a), \text{ so wird}$$
$$**)\ b_1 - a_1 = b - a \text{ und zugleich}$$
$$b_1 - b = a_1 - a \text{ (vgl. Fig. 8).}$$

Fig. 8.

Führt man aber den Wert **) in die Gleichung 29) ein und berücksichtigt noch die Gleichung 23), so erhält man die Gleichung

30) . . . . $[ab] = [a_1(b_1 - a_1)] = [a_1 b_1]$

und damit den Satz:

Das äufsere Produkt zweier einfachen Punkte ändert seinen Wert nicht, wenn man beide Faktoren in der durch sie bestimmten Linie um gleiche Strecken verschiebt; oder auch:

Ein Stab kann unbeschadet seines Wertes in seiner eigenen Linie beliebig verschoben werden.

Es entspricht also auch in dieser Hinsicht der Stab vollkommen einer an einem starren Körper angreifenden Kraft, und es läfst sich daher auch die Addition von Stäben, die sich schneiden, nach dem Vorbilde der Mechanik auf die Addition von Stäben mit gemeinsamem Anfangspunkte zurückführen. In der That sind A_1 und A_2 zwei Stäbe, die sich in a schneiden, k_1 und k_2 ihre Strecken (vgl. Fig. 9), so wird

$$31) \quad \dots \quad \begin{cases} A_1 = [ak_1] \\ A_2 = [ak_2], \end{cases}$$

ihre Summe A also

$$32) \quad A = A_1 + A_2 = [ak_1] + [ak_2] = [a(k_1 + k_2)],$$

d. h. „die Summe zweier sich schneidenden Stäbe ist ein Stab, der durch ihren Schnittpunkt geht, und dessen Strecke die Summe der Strecken beider Stäbe ist"; oder anders ausgedrückt:

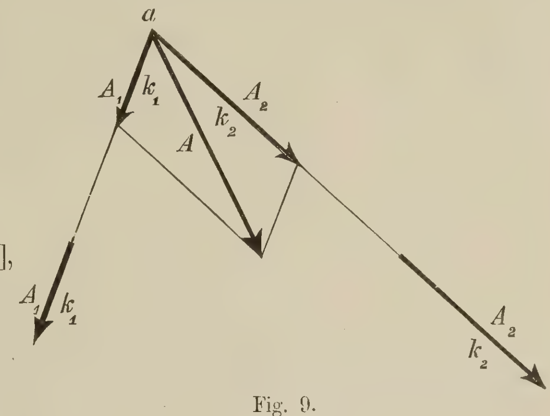


Fig. 9.

Die Summe zweier sich schneidenden Stäbe ist wieder ein Stab, nämlich die von ihrem Schnittpunkte ausgehende Diagonale des durch die beiden Stäbe bestimmten Parallelogramms.

Aber auch in dem Falle, wo die beiden zu summierenden Stäbe einander parallel laufen, führt die Addition der sie darstellenden Punktprodukte sofort zu der aus der Mechanik bekannten Addition paralleler Kräfte. Denn sind

$$33) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} A_1 = [a_1 k_1] \\ A_2 = [a_2 k_2] \end{cases}$$

zwei parallele Stäbe (vgl. Fig. 10), so werden sich ihre Strecken in der Form darstellen lassen

$$34) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} k_1 = \mathfrak{m}_1 k \\ k_2 = \mathfrak{m}_2 k, \end{cases}$$

Fig. 10.

die Stabsumme A wird daher

$$35) \quad A = A_1 + A_2 = [a_1 k_1] + [a_2 k_2] = [a_1 \cdot \mathfrak{m}_1 k] + [a_2 \cdot \mathfrak{m}_2 k] = [(\mathfrak{m}_1 a_1 + \mathfrak{m}_2 a_2) k].$$

Sind hierin nicht gerade die Zahlfaktoren $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ entgegengesetzt gleich, die Strecken k_1 und k_2 beider Stäbe also nicht gerade gleich lang und von entgegengesetztem Sinn, so ist der erste Faktor der rechten Seite der mit der Summe $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ belastete Schwerpunkt s der vielfachen Punkte $\mathfrak{m}_1 a_1$ und $\mathfrak{m}_2 a_2$, d. h. es ist

$$36) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathfrak{m}_1 a_1 + \mathfrak{m}_2 a_2 = (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) s,$$

folglich wird

$$\begin{aligned} A = A_1 + A_2 &= [(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) s k] \\ &= [s \cdot (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) k] \\ &= [s(\mathfrak{m}_1 k + \mathfrak{m}_2 k)], \quad \text{oder also nach 34)} \end{aligned}$$

$$37) \quad \dots\dots\dots\dots \quad A = A_1 + A_2 = [s(k_1 + k_2)],$$

d. h. „die Summe zweier parallelen Stäbe, deren Streckensumme von Null verschieden ist, ist wieder ein Stab, dessen Strecke die Streckensumme beider Stäbe ist, und dessen Anfangs-

punkt sich als Schwerpunkt aus den Anfangspunkten der Summandenstäbe ergiebt, falls man sich diese Punkte mit Massen behaftet denkt, deren Gröfse den Stablängen proportional, und deren Vorzeichen gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem der Sinn beider Stäbe übereinstimmt oder nicht“.

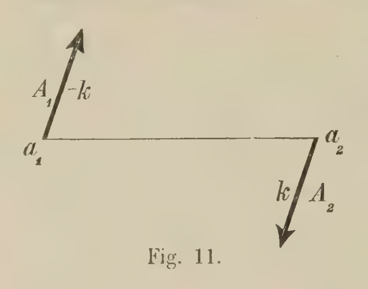


Fig. 11.

Man hat endlich noch den oben ausgeschlossenen Ausnahmefall zu behandeln, wo die beiden parallelen Stäbe gleiche Länge, aber entgegengesetzten Sinn haben. Zwei solche Stäbe lassen sich in der Form darstellen

$$38) \quad \ldots \ldots \begin{cases} A_1 = -[a_1 k] \\ A_2 = \quad [a_2 k] \end{cases}$$

(vgl. Fig. 11). Für ihre Summe, — wir wollen sie ein Stabpaar nennen, — erhält man die Darstellung

$$39) \quad \ldots \ldots \quad A = A_1 + A_2 = -[a_1 k] + [a_2 k] = [(a_2 - a_1) k]$$

d. h. „ein Stabpaar ist gleich dem äufseren Produkte zweier Strecken, von denen die erste vom Anfangspunkte des ersten Stabes zum Anfangspunkte des zweiten führt, während die zweite Strecke die Strecke des zweiten Stabes ist“.

Ein solches Streckenprodukt wurde nun zwar oben bereits nach der formalen Seite hin untersucht, — wobei sich ergab, dafs seine Rechengesetze mit denen der Punktprodukte übereinstimmen —, aber es bleibt noch seine reale Bedeutung zu ermitteln. Hierbei kann man wieder denselben Weg einschlagen wie oben bei der Entwickelung des Begriffs einer Strecke. Man setze einstweilen das fragliche Produkt

$$40) \quad \ldots \ldots \quad [(a_2 - a_1) k] = F,$$

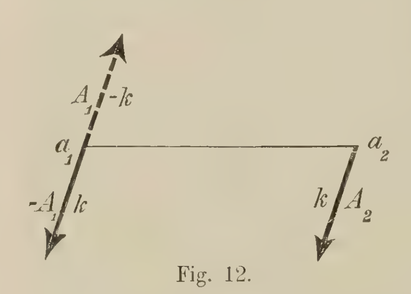


Fig. 12.

dann ist das Produkt F darstellbar als Differenz der beiden gleich langen und nach derselben Seite laufenden Stäbe $[a_2 k]$ und $[a_1 k]$ (vgl. Fig. 12), nämlich

$$[a_2 k] - [a_1 k] = F,$$

und also nach dem Begriffe der Differenz

$$41) \quad \ldots \ldots \quad [a_2 k] = [a_1 k] + F.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs die Addition des Streckenproduktes F den Stab $[a_1 k]$, welcher mit dem ersten Stabe A_1 des Paares entgegengesetzt gleich ist, in dessen zweiten Stab $A_2 = [a_2 k]$ überführt, d. h. dafs sie ihn um ein Parallelogramm verschiebt, welches die Faktoren des Produktes F zu Seiten hat; dabei ist die Seite des Parallelogramms, längs deren verschoben wird, — wir wollen sie die Leitstrecke der Verschiebung nennen —, der erste Faktor des Produktes F und die Strecke des verschobenen Stabes selbst der zweite Faktor.

Es läfst sich aber weiter zeigen, dafs überhaupt jeder beliebige Stab C, wenn er nur der durch die Faktoren des Produktes F bestimmten Ebene parallel läuft*), durch Addition des Produktes F eine Verschiebung um ein Parallelogramm erfährt, dessen Gröfse und Sinn durch die Faktoren des Produktes F festgelegt wird.

---

*) Der Fall, wo auch diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann hier ausgeschlossen bleiben, da die Untersuchung schliefslich doch auf Figuren einer Ebene beschränkt werden wird, und die Betrachtung des Räumlichen nur so weit durchgeführt werden soll, wie es zur Klarlegung der auch für die Ebene wichtigen Grundbegriffe nötig erscheint.

Zunächst behandeln wir als zweiten Sonderfall den Fall, wo der Stab C wenigstens noch seiner Richtung nach mit dem zweiten Faktor k des Streckenproduktes

42) . . . . $F = [hk]$ übereinstimmt, wo also

43) . . . . $C = [a \cdot \mathfrak{n}k]$ ist; dann wird die gesuchte Summe

44) . . . . $C + F = [a \cdot \mathfrak{n}k] + [hk]$

$$= [a \cdot \mathfrak{n}k] + \left[\frac{1}{\mathfrak{n}}h \cdot \mathfrak{n}k\right], \text{ oder also}$$

45) . . . . $C + F = \left[\left(a + \frac{1}{\mathfrak{n}}h\right) \cdot \mathfrak{n}k\right].$

Die Strecke $\mathfrak{n}k$ des Stabes C hat also bei seiner Vermehrung um das Produkt F keine Veränderung erfahren, aber der Stab ist um ein Parallelogramm verschoben, welches die Strecke $\frac{1}{\mathfrak{n}}h$ zur Leitstrecke hat (vgl. Fig. 13). Während also die Strecke des verschobenen Stabes das $\mathfrak{n}$-fache vom zweiten Faktor des Produktes F ist, bildet die Leitstrecke der Verschiebung den $\mathfrak{n}$-ten Teil des ersten Faktors. Das Verschiebungsparallelogramm stimmt daher wieder mit dem Parallelogramme h, k nach Gröfse, Sinn und Stellung seiner Ebene überein.

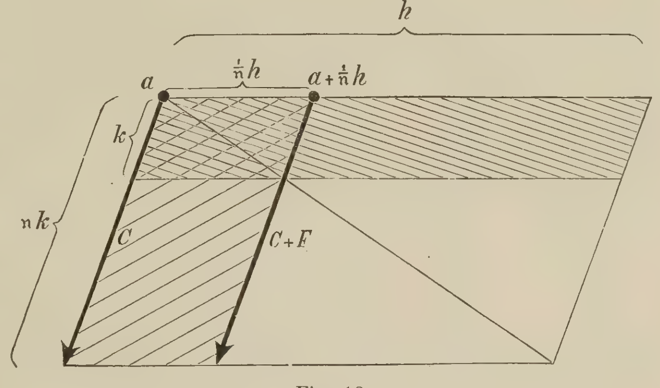


Fig. 13.

Ist endlich der Stab C, welcher um das Streckenprodukt $F = [hk]$ vermehrt werden soll, nur noch an die Bedingung geknüpft, dafs er der Ebene des Parallelogramms h, k parallel läuft, so zerlege man ihn in zwei Komponenten C_1 und C_2, welche mit den Faktoren h und k des Produktes F gleiche Richtung haben (vgl. Fig. 14). Dann wird

46) $C + F = C_1 + C_2 + F = C_1 + (C_2 + F)$.

Hier entspricht die Summe in der Klammer genau dem oben betrachteten zweiten Sonderfall; denn der Stab C_2 hat die Richtung des zweiten Faktors k. Er erfährt also durch Hinzufügung des Produktes F eine Verschiebung in der Richtung des ersten Faktors h und zwar um ein Parallelogramm, welches nach Gröfse, Sinn und Stellung seiner Ebene mit dem Parallelogramme h, k übereinstimmt. Es kann aber andererseits auch der Stab C_1 unbeschadet seines Wertes nach demselben Anfangspunkte verschoben werden; er verschmilzt daher mit dem Summenstabe $C_2 + F$ zu einem Gesamtstabe $D = C + F$, welcher selbst gegen C um ein Parallelogramm verschoben ist, das mit dem Parallelogramme h, k gleichen Flächen-

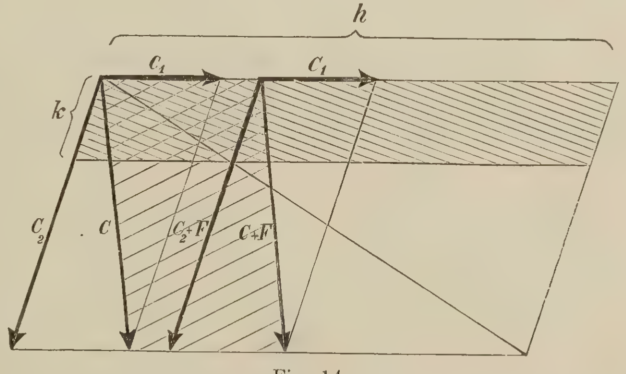


Fig. 14.

inhalt, gleichen Sinn und gleiche Stellung hat, während es freilich in seiner Gestalt von ihm durchaus verschieden ist.

Nennen wir daher einen Flächenraum, an welchem seine Gröfse, sein Sinn und die Stellung seiner Ebene, nicht aber die Form und Lage festgehalten wird, nach dem Vorgange von Mehmke ein „Feld“, so können wir sagen: In sämtlichen oben betrachteten Fällen wird das Produkt $F = [hk]$ geometrisch charakterisiert durch das Feld, welches mit dem Parallelogramme h, k gleiche Gröfse, gleichen Sinn und gleiche Stellung hat; und wir verstehen daher unter dem Produkte zweier Strecken h und k geradezu das durch sie bestimmte Feld.

Durch diese Festsetzung gewinnt das Zeichen F eine neue Bedeutung: Es ist nunmehr nicht nur eine Abkürzung für das Produkt $[hk]$, sondern zugleich das Zeichen für die soeben definierte Feldgröfse; und das Ergebnis unserer obigen Untersuchung läfst sich daher, falls man noch die Gleichung $D = C + F$ nach F auflöst, sie also in der Form schreibt

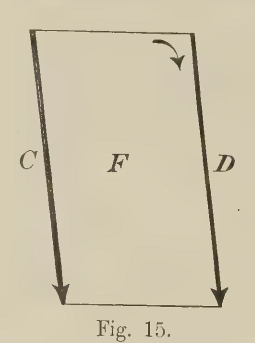


Fig. 15.

$$D - C = F,$$

in den Satz zusammenfassen:

Die Differenz $D - C$ zweier Stäbe von gleicher Länge, gleicher Richtung und gleichem Sinn ist ein Feld F, dessen erste Seite vom Anfangspunkte des Subtrahendus nach dem Anfangspunkte des Minuendus führt, und dessen zweite Seite die Strecke beider Stäbe ist (vgl. Fig. 15).

Auch lassen jetzt die bereits oben für das Streckenprodukt entwickelten Formeln eine geometrische Erhärtung zu. Der durch die obigen Formeln

24) . . . . $[hh] = 0$ und

25) . . . . $[h \cdot \mathfrak{n}h] = 0$

dargestellte Satz:

„Das äufsere Produkt paralleler Strecken verschwindet“ ist nur ein anderer Ausdruck des geometrisch selbstverständlichen Satzes:

„Ein Parallelogramm, von welchem zwei anstofsende Seiten in dieselbe gerade Linie fallen, hat den Flächeninhalt Null.“

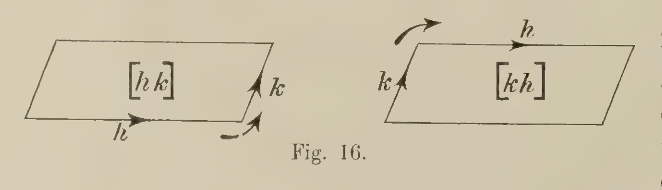


Fig. 16.

Die Vertauschungsformel

26) $[kh] = -[hk]$ enthält den Satz: „Beim Wechsel seines Sinnes ändert ein Feld sein Zeichen“ (vgl. Fig. 16), während die Formel der linealen Änderung

27) $[h(k + \mathfrak{n}h)] = [hk]$ den Satz darstellt: „Parallelogramme, welche zwischen Parallelen liegen und gleiche Grundlinie haben, sind einander gleich“ (vgl. Fig. 17).

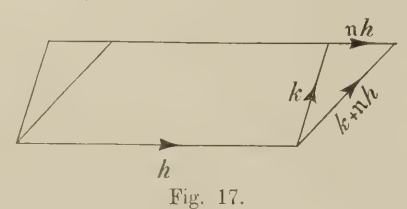


Fig. 17.

Das allgemeine distributive Gesetz endlich

47) $[(g + h)k] = [gk] + [hk]$

findet, falls die drei Strecken g, h und k derselben Ebene angehören sollten, seine Bestätigung durch eine zweimalige Anwendung des eben genannten Satzes (vgl. Fig. 18); ist

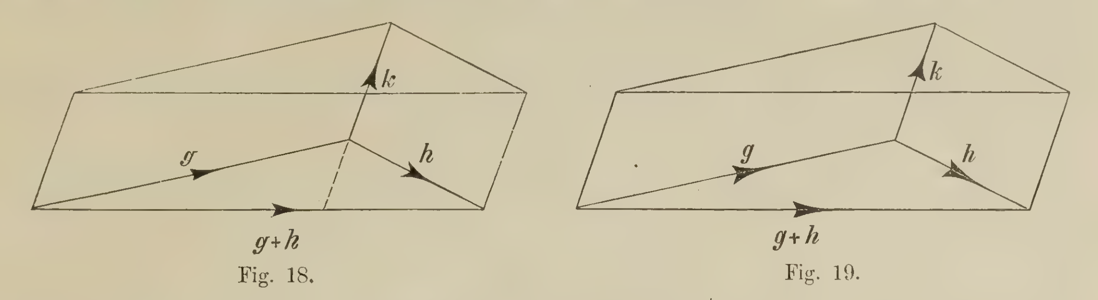


Fig. 18. Fig. 19.

hingegen diese Bedingung nicht erfüllt, besitzen also die Felder $[gk]$ und $[hk]$ verschiedene Stellung, so kann die Formel 47) als Definitionsgleichung ihrer Summe dienen (vgl. Fig. 19).

Das äufsere Produkt dreier Faktoren läfst sich durch die Forderung definieren, es solle aufser dem distributiven Gesetze

48) . . . . $[ab(c+d)] = [abc] + [abd]$

auch noch das assoziative Gesetz

49) . . . . $[a(bc)] = [abc]$

gelten. Mit Hülfe dieses Gesetzes und der Vertauschungsformel für zweifaktorige Produkte läfst sich dann leicht zeigen, dafs die Gleichung 48) auch erhalten bleibt, wenn man den Summenfaktor an die zweite oder erste Stelle treten läfst, dafs also auch die Formeln bestehen

50) . . . . $\begin{cases} [a(c+d)b] = [acb] + [adb] \\ [(c+d)ab] = [cab] + [dab]. \end{cases}$

Ferner folgt durch dieselbe Schlufsweise wie auf S. 7 die Gültigkeit der entsprechenden Differenzformeln

51) . . . . $\begin{cases} [ab(c-d)] = [abc] - [abd] \\ [a(c-d)b] = [acb] - [adb] \\ [(c-d)ab] = [cab] - [dab]; \end{cases}$

auch ergeben sich ebenso wie dort die Formeln

52) . . . . $\begin{cases} [ab0] = 0 \\ [a0b] = 0 \\ [0ab] = 0 \end{cases}$ und

53) . . . . $\begin{cases} [ab(\mathfrak{n}c)] = \mathfrak{n}[abc] \\ [a(\mathfrak{n}c)b] = \mathfrak{n}[acb] \\ [(\mathfrak{n}c)ab] = \mathfrak{n}[cab]. \end{cases}$

Aus der Grundformel 19) der äufseren Multiplikation ferner entspringen unter Berücksichtigung der Formeln 17), 49) und 21) ganz entsprechende Grundformeln für dreifaktorige Produkte, nämlich die Formeln

54) . . . . $\begin{cases} [add] = 0 \\ [ebe] = 0 \\ [ffc] = 0, \end{cases}$

welche aussagen, dafs auch ein dreifaktoriges Punktprodukt verschwindet, sobald zwei Faktoren einander gleich werden. Und diese Formeln bilden dann wieder den Ausgangspunkt für die dem äufseren Produkt von drei Faktoren im Gegensatz zum algebraischen Produkte eigentümlichen Gesetze.

Zunächst erhält man wieder, wenn man die gleichen Faktoren durch je eine Summe ersetzt, also etwa für d, e, f die Werte einführt

$$d = b + c, \quad e = c + a, \quad f = a + b$$

und dann das distributive Gesetz anwendet, die Vertauschungsformeln des dreifaktorigen Produktes

55) . . . . $\begin{cases} [acb] = -[abc] \\ [cba] = -[abc] \\ [bac] = -[abc], \end{cases}$ welche aussagen:

Ein äufseres Produkt von drei Faktoren ändert sein Zeichen, wenn man irgend zwei Faktoren miteinander vertauscht.

Hieraus aber folgt weiter:

„Der Wert eines dreifaktorigen äufseren Produktes bleibt unverändert, wenn man den ersten oder den letzten Faktor über die beiden andern Faktoren hinwegsetzt.

Zwischen den sechs Produkten, welche durch verschiedene Anordnung der drei Faktoren eines äufseren Produktes hervorgehen, bestehen daher die Beziehungen

56) . . . . $\begin{cases} \quad [abc] = \quad [bca] = \quad [cab] \\ = -[acb] = -[bac] = -[cba]. \end{cases}$

Ferner aber findet auch die Formel der linealen Änderung (Nr. 22) ihr Analogon, denn es wird wegen 54)

57) . . . . $[abc] = [ab(c + \mathfrak{m}a + \mathfrak{n}b)]$

und entsprechende Veränderungen gestatten auch die beiden ersten Faktoren des Produktes $[abc]$, d. h. es gilt der Satz:

Ein dreifaktoriges äufseres Produkt ändert seinen Wert nicht, wenn man einen Faktor um beliebige Vielfache der beiden andern vermehrt, oder:

Ein dreifaktoriges äufseres Produkt verhält sich invariant gegenüber jeder linealen Änderung seiner Faktoren.

Von besonderem Interesse ist diejenige spezielle lineale Änderung, welche man erhält, wenn man $\mathfrak{m} = -\mathfrak{n}$ annimmt, wodurch die Formel 57) übergeht in

58) . . . . $[abc] = [ab(c + \mathfrak{n}(b - a))]$.

Eine solche spezielle lineale Änderung ist dadurch ausgezeichnet, dafs sie, falls die Faktoren des Produktes einfache Punkte sind, deren Masse unverändert läfst und nur eine Verschiebung dieser Punkte hervorruft.

Die Formel der speziellen linealen Änderung leitet schon hinüber zu dem realen Begriff des dreifaktorigen äufseren Produktes. Stellt man sich nämlich die Aufgabe, das Produkt dreier einfachen Punkte geometrisch zu deuten, d. h. eine geometrische Gröfse anzugeben, welche invariant bleibt bei allen Faktorenänderungen, welche das Produkt gestattet, so zeigt die Formel 58) bereits eine höchst charakteristische Eigenschaft dieser geometrischen Gröfse. Sind nämlich a, b, c drei einfache Punkte und

59) . . . . $\delta = [abc]$

ihr äufseres Produkt, so kann man zufolge der Gleichung 58), ohne den Wert des Produktes δ zu ändern, seinen dritten Faktor c durch den Punkt

$$c_1 = c + \mathfrak{n}(b - a)$$

ersetzen, d. h. durch denjenigen einfachen Punkt c_1, welcher aus c durch eine Verschiebung um das $\mathfrak{n}$-fache der Strecke $b - a$ hervorgeht. Man hat also den Satz:

„Das äufsere Produkt dreier einfachen Punkte ändert seinen Wert nicht, wenn man den dritten Faktor parallel zur Verbindungslinie der beiden ersten verschiebt.“

Fig. 20.

Diese Eigenschaft kommt z. B. der Fläche des Parallelogramms zu, welches die Linien ab und bc zu Seiten hat (vgl. Fig. 20)*).

Unterwirft man jetzt auch den zweiten Faktor des so umgewandelten Produktes einer solchen „speziellen linealen Änderung“, so erhält man

$$\delta = [abc] = [abc_1] = [a(b + \mathfrak{p}(c_1 - a))c_1] = [ab_1c_1],$$

wo wieder die Abkürzung eingeführt ist

$$b_1 = b + \mathfrak{p}(c_1 - a).$$

Dann stimmt auch hier wiederum das mit dem neuen Produkt $[ab_1c_1]$ verknüpfte Parallelogramm ab_1, b_1c_1 mit dem Parallelogramme ab, bc nach Gröfse und Sinn überein (vgl. Fig. 21).

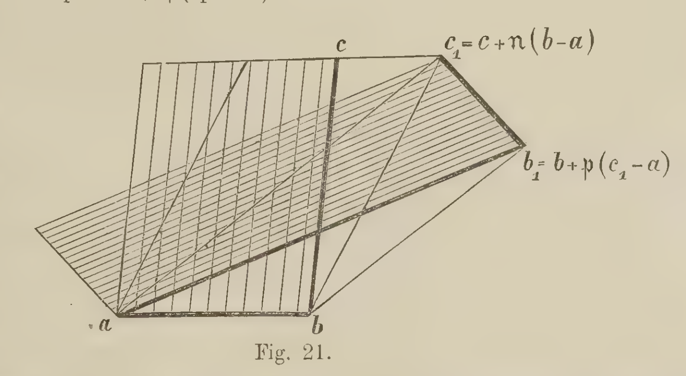


Fig. 21.

Durch wiederholte Anwendung spezieller linealer Änderungen auf die beiden letzten Faktoren kann man aber aus dem Parallelogramme ab, bc überhaupt jedes Parallelogramm herstellen, welches die Ecke a enthält, in der Ebene abc liegt und mit dem Parallelogramme ab, bc die Gröfse und den Sinn gemein hat. Aber auch der bisher festgehaltene Eckpunkt a läfst sich noch ganz beliebig innerhalb der Ebene abc variieren; denn man kann in dem Produkte $[ab_1c_1]$ auch noch den ersten Faktor a in ganz entsprechender Weise verändern. Man erhält dann

$$\delta = [abc] = [ab_1c_1] = [(a + \mathfrak{q}(b_1 - c_1))b_1c_1] = [a_1b_1c_1],$$

wo wieder

$$a_1 = a + \mathfrak{q}(b_1 - c_1)$$

gesetzt ist. Hier ist dann in der That der neue Eckpunkt a_1 ein ganz beliebiger Punkt der Ebene abc; denn wegen der Willkürlichkeit der Zahlfaktoren $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$ ist die Richtung der Strecke $b_1 - c_1$, d. h. die Verschiebungsrichtung des Punktes a innerhalb der Ebene abc

*) Warum hier das Parallelogramm bevorzugt wird, und nicht das Dreieck abc, welches dieselbe Eigenschaft besitzt, findet seine Erklärung weiter unten.

vollkommen willkürlich und wegen der Willkürlichkeit von $\mathfrak{q}$ auch die Gröfse seiner Verschiebung; zugleich bleibt wiederum die Gröfse und der Sinn des Parallelogramms der drei Punkte unverändert. Hat man so den Anfangspunkt a des Parallelogramms nach einem beliebigen Punkte der Ebene abc verlegt, so kann man schliefslich wieder durch lineale Änderung der beiden letzten Faktoren dem Parallelogramme jede beliebige Form verleihen.

Die gesuchte geometrische Gröfse, welche durch das Produkt $\delta = [abc]$ dargestellt wird, ist also ein Parallelogramm, welches mit dem Parallelogramme ab, bc nach Gröfse, Sinn und Lage seiner Ebene übereinstimmt, welches aber innerhalb dieser Ebene seine Lage und Form beliebig verändern kann. Ein solches Parallelogramm müssen wir zum Unterschiede von dem Felde, an welchem nur die Stellung seiner Ebene, nicht aber diese Ebene selbst festgehalten wurde, mit einem besonderen Namen belegen, wir wollen es ein „Blatt"*) nennen und verstehen dann also unter dem Produkte $\delta = [abc]$ geradezu das durch die drei Punkte a, b, c bestimmte Blatt, d. h. ein Parallelogramm von beliebiger Form, welches mit dem Parallelogramme ab, bc nach Gröfse und Sinn übereinstimmt und in der Ebene der drei Punkte a, b, c, aber auch nur in dieser, verschiebbar ist.

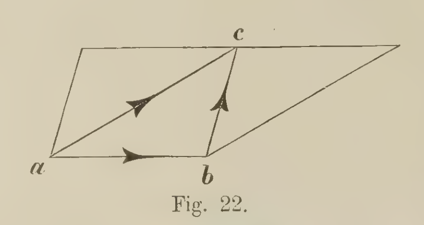


Fig. 22.

Zu dem durch die drei Punkte a, b, c bestimmten Felde $[(b-a)(c-b)]$, oder dem gleich grofsen Felde $[(b-a)(c-a)]$ (vgl. Fig. 22) steht das Blatt $[abc]$ geometrisch in derselben Beziehung wie der Stab $[ab]$ zur Strecke $b-a$. Denn während die Strecke $b-a$ parallel zu sich beliebig verschoben werden kann, gestattet der Stab $[ab]$ nur noch eine Verlegung in seiner eigenen Linie, und, während das Feld $[(b-a)(c-a)]$ aus seiner Ebene parallel zu sich beliebig verlegt werden darf, bleibt das Blatt $[abc]$ an seine Ebene gefesselt. Aber auch analytisch findet sich zwischen Blatt und Feld derselbe Zusammenhang wie zwischen Stab und Strecke; denn es wird nach dem Satze von der linealen Änderung

$$[a(b-a)(c-a)] = [abc] \quad \text{und}$$

$$60) \quad . \ . \ . \ . \quad [(a + \mathfrak{m}(b-a) + \mathfrak{n}(c-a))(b-a)(c-a)] = [abc]$$

d. h. das Blatt $[abc]$ läfst sich aus dem zugehörigen Felde $[(b-a)(c-a)]$ dadurch ableiten, dafs man dieses mit einem beliebigen Punkte der Ebene des Blattes $[abc]$ äufserlich vormultipliziert (oder auch nachmultipliziert, vgl. S. 16), was der obigen Beziehung zwischen Stab und Strecke genau entspricht.

Dieser Zusammenhang zwischen Blatt und Feld enthält zugleich den Grund dafür, dafs oben bei der Einführung des Produktes dreier einfachen Punkte a, b, c als sein geometrisches Abbild nicht das durch sie bestimmte Dreieck abc, sondern das Parallelogramm ab, bc gewählt wurde. Hätte man nämlich damals das Dreieck abc bevorzugt, so würde die Multiplikation eines Feldes mit einem einfachen Punkte eine andere Bedeutung gewonnen haben: sie würde nicht nur eine Fesselung des Feldes an die durch seine Stellung und jenen Punkt bestimmte Ebene bewirkt, sondern zugleich noch seine Gröfse auf die Hälfte herabgedrückt haben, was unnötig verwickelt erscheint.

*) Mein Vater benutzt den Ausdruck „Flächenteil", H. Hankel die Bezeichnung „Ebenenstück". Vgl. die Anm. auf S. 7.

Durch die gewonnene geometrische Deutung des dreifaktorigen Produktes erhalten endlich auch die oben für das dreifaktorige Produkt entwickelten Formeln einen geometrischen Sinn. Die Formel der Distributivität:

48) . . . . $[ab(c+d)] = [abc] + [abd]$

nimmt, wenn man wieder wie oben $c+d = 2m$ setzt, die Gestalt an

$$2[abm] = [abc] + [abd]$$

und läfst sich in dieser Form, falls die vier Punkte a, b, c, d einer Ebene angehören, sofort geometrisch erhärten (vgl. Fig. 23 und oben Fig. 18). Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so giebt die Formel die Erklärung für die Summe zweier Blätter, deren Ebenen sich schneiden.

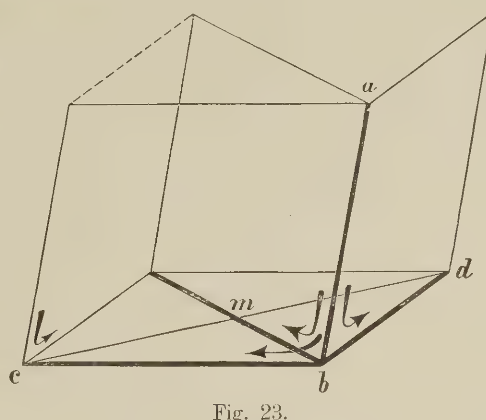


Fig. 23.

Die Formel der Assoziativität

49) . . . $[a(bc)] = [abc]$

liefert zusammen mit den Formeln 56) für die Verstellbarkeit der Faktoren eines dreifaktorigen Produktes die Vertauschungsformel für das Produkt aus Punkt und Stab. Denn ist a ein Punkt und $B = [bc]$ ein Stab, so wird

$$[aB] = [a(bc)] = [abc] = [bca] = [(bc)a] = [Ba],$$

d. h. es ergiebt sich die Formel

61) . . . . $[aB] = [Ba]$

und damit der Satz:

Die Faktoren eines äufseren Produktes aus Punkt und Stab sind ohne Zeichenwechsel vertauschbar.

Durch Verknüpfung der Formeln für die Verstellbarkeit eines Zahlfaktors bei zwei- und dreifaktorigen Produkten beweist man ferner unter gleichzeitiger Benutzung von 49) die entsprechenden Formeln für Produkte aus Punkt und Stab, nämlich die Formeln

62) . . . . . . $\begin{cases} [a \cdot \mathfrak{n}B] = \mathfrak{n}[aB] \\ [\mathfrak{n}B \cdot a] = \mathfrak{n}[Ba]. \end{cases} \quad \begin{cases} [\mathfrak{n}a \cdot B] = \mathfrak{n}[aB] \\ [B \cdot \mathfrak{n}a] = \mathfrak{n}[Ba]. \end{cases}$

In der That wird, wenn man wieder $B = [bc]$ setzt,

$$[a \cdot \mathfrak{n}B] = [a \cdot \mathfrak{n}(bc)] = [a(\mathfrak{n}b \cdot c)] = [a(\mathfrak{n}b)c] = \mathfrak{n}[abc] = \mathfrak{n}[a(bc)] = \mathfrak{n}[aB].$$

Die zweite Formel läfst sich mit Hülfe von 61) aus der eben bewiesenen ableiten. Die beiden letzten Formeln ergeben sich ohne Weiteres aus 53), und zwar die dritte wieder unter Benutzung von 49).

Die aus den Grundformeln 54) entspringende Formel

63) . . . . $[ab(\mathfrak{p}a + \mathfrak{q}b)] = 0,$

nach welcher das äufsere Produkt dreier in gerader Linie liegenden Punkte verschwindet (vgl. Fig. 24), drückt wieder, wie oben die Streckenformel 25), die geometrisch selbstverständliche Thatsache aus, dafs ein Parallelogramm, von welchem drei Ecken in dieselbe gerade Linie fallen, den Flächeninhalt Null besitzt. Setzt man in ihr noch

a — b — $\mathfrak{p}a + \mathfrak{q}b$

Fig. 24.

64) . . . . $[ab] = C$ und

65) . . . . $\mathfrak{p}a + \mathfrak{q}b = c,$

so verwandelt sie sich in die Gleichung

66) . . . . $[Cc] = 0,$

welche aussagt (vgl. Fig. 25):

Fig. 25.

Das äufsere Produkt aus einem Stabe und einem auf seiner Linie liegenden Punkte ist null.

Übrigens kann hier der Punkt c auch durch eine Strecke vertreten werden, welche die Richtung des Stabes hat. Denn wählt man in 63) $\mathfrak{p} = -\mathfrak{q}$, so erhält man die Spezialformel

67) . . . . $[ab \cdot \mathfrak{q}(b - a)] = 0,$

für die man, wenn man noch

68) . . . . $\mathfrak{q}(b - a) = k$ setzt, auch schreiben kann

69) . . . . $[Ck] = 0,$ d. h.

Das äufsere Produkt aus einem Stab und einer ihm parallelen Strecke verschwindet.

Endlich kann man in der Formel 63) auch die beiden Punkte a und b durch Strecken ersetzen und erhält dann die Formel

70) . . . . $[gh(\mathfrak{p}g + \mathfrak{q}h)] = 0.$

Sind in ihr g und h zwei ganz beliebige Strecken, so stellt die Summe $\mathfrak{p}g + \mathfrak{q}h$ eine dritte Strecke dar, welche der durch g und h bestimmten Ebene parallel läuft, im übrigen aber ganz willkürlich ist. Die Formel 70) enthält daher den Satz:

Das äufsere Produkt dreier Strecken, welche derselben Ebene parallel laufen, ist null.

Dritter Abschnitt.

Progressive und regressive Multiplikation. Das planimetrische Produkt.

Beschränkt man die Untersuchung, wie es im Folgenden geschehen soll, auf Figuren einer Ebene, so verschwindet die *geometrische* Verschiedenheit zwischen Feld und Blatt, und beide Gröfsen bleiben nur noch *formal* verschieden. Diese Beschränkung führt dann zugleich eine wesentliche Vereinfachung in der analytischen Auffassung des Blattes herbei, welche dieses zum Stabe und zur Strecke in einen gewissen Gegensatz bringt. Während nämlich beispielsweise zum Begriff des Stabes neben der Gröfse und dem Sinn auch noch ein die Lage in der Ebene bezeichnendes Attribut gehörte, fällt ein solches *in der Geometrie der Ebene bei dem Blatte* fort; denn es erscheinen alle Blätter der Ebene als gleichartige Gröfsen und können daher wie gleichbenannte Zahlen behandelt werden. Legt man als Einheit der Blätter ein beliebiges Mafs, etwa das qcm, zu Grunde und weist zugleich dieser Einheit einen bestimmten Sinn zu (vgl. Fig. 26), so läfst sich jedes beliebige Blatt δ durch eine unbenannte Zahl darstellen, welche angiebt, wie viele solcher Einheiten das Blatt δ enthält, und welche positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem das Blatt δ in demselben oder in entgegengesetztem Sinne umlaufen wird wie das Einheitsblatt.

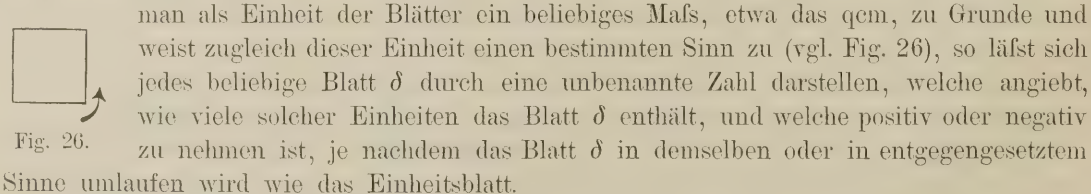


Fig. 26.

Man bezeichne ferner drei Ecken des Einheitsquadrates, aufgefafst als einfache Punkte, mit e_1, e_2, e_3 und gebe ihnen dabei noch eine solche Anordnung, dafs die Stäbe $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ zwei anstofsende Seiten des Quadrates werden und aufserdem das Produkt

71) . . . . $[c_1 c_2 c_3] = +1$

wird (vgl. Fig. 27); endlich setze man noch die Strecken

72) . . . . $\begin{cases} c_1 - c_3 = i_1 \\ c_2 - c_3 = i_2. \end{cases}$

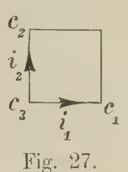


Fig. 27.

Dann wird

73) . $1 = [c_1 c_2 c_3] = [(c_1 - c_3)(c_2 - c_3) c_3] = [i_1 i_2 c_3] = [c_3 i_1 i_2] = [c_3 \cdot i_1 i_2]$.

Man hat also durch die obige Wahl der Blatteinheit zugleich auch über das Produkt aus dem einfachen Punkte c_3 und dem Felde $[i_1 i_2]$ verfügt. Es ist aber klar, dafs man, nachdem das Blatt $[c_3 \cdot i_1 i_2] = 1$ gesetzt ist, nicht etwa gleichzeitig auch das mit der Blatteinheit gleich grofse Feld $[i_1 i_2]$ der Zahleinheit gleich setzen darf. Zwar erscheinen bei der Beschränkung der Betrachtung auf die Ebene auch die Felder als gleichbenannte Gröfsen; aber ihre Einheit darf man nicht als eine blofse Zahl auffassen wollen, da die Multiplikation mit ihr den Punkt c_3 und überhaupt jeden beliebigen Punkt in eine Gröfse ganz anderer Art, nämlich in eine Zahl, verwandelt. Man mufs daher für die Einheit der Felder ein besonderes Zeichen einführen. Es sei etwa das Feld

74) . . . . $[i_1 i_2] = J$

gesetzt und als Einheitsfeld bezeichnet. Dann wird für jeden einfachen Punkt a

75) . . . . $[aJ] = [c_3 J] = 1$,

d. h. die Multiplikation mit dem Einheitsfelde J verwandelt jeden einfachen Punkt in die Zahleinheit.

Die obige Verfügung über die Blatteinheit führt hinüber zu einer neuen Art der Multiplikation. Bei allen bisher betrachteten Produktbildungen war die Stufensumme der beiden Faktoren, d. h. die Anzahl der in beiden Faktoren zusammen auftretenden Punkt- (oder Strecken-)Faktoren, höchstens $= 3$ angenommen. Es bleibt aber noch die Frage zu erledigen, ob sich vielleicht auch dem 4- oder 5-stufigen Produkte z. B. dem Produkte zweier Stäbe oder dem Produkte eines Blattes und eines Punktes oder endlich dem Produkte eines Blattes und eines Stabes ein Sinn unterlegen läfst. Versucht man zunächst das durch fortschreitende Aneinanderkettung von vier Punktfaktoren gebildete Produkt oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Produkt aus einem Blatte und einem Punkte, auf Grund der Forderung zu definieren, dafs für dieses Produkt die Gesetze der äufseren Multiplikation möglichst erhalten bleiben sollen, so stöfst man sogleich auf eine Schwierigkeit. Nach Analogie der Produkte von weniger als vier Faktoren würde man nämlich das Produkt $[abc(\mathfrak{p}a + \mathfrak{q}b + \mathfrak{r}c)]$ gleich Null zu setzen haben. Indes erscheint dies

erstens für die weitere Entwickelung unserer Methoden wenig förderlich, da dann überhaupt jedes vierfaktorige Produkt verschwinden würde, insofern sich jeder beliebige Punkt d der Ebene als Vielfachensumme von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten a, b, c, d. h. in der Form

$$d = \mathfrak{p}a + \mathfrak{q}b + \mathfrak{r}c,$$

darstellen läfst.

Zweitens aber haben wir auch bei der Begriffsbestimmung gerade dieser Art von 4-stufigen Produkten gar nicht mehr freie Hand, sondern sind bereits durch eine frühere Festsetzung gebunden. In dem Produkte

$$[abc(\mathfrak{p}a + \mathfrak{q}b + \mathfrak{r}c)] = [abcd] = [[abc]d]$$

ist nämlich der Entwickelung auf S. 20 zufolge der Blattfaktor $[abc]$ als eine blofse Zahl aufzufassen. Ist daher $\mathfrak{n}$ der Zahlwert des Produktes $[abc]$, so erscheint es geboten, unter dem Produkte

76) $$[abcd] = [[abc]d] = [\mathfrak{n}d]$$

nichts anderes zu verstehen als das $\mathfrak{n}$-fache des Punktes d, und man erhält daher, wenn man noch beachtet, dafs die Stellung eines Zahlfaktors willkürlich ist, die Definitionsgleichung

77) $$[abcd] = [abc]d = d[abc].$$

Das durch fortschreitendes Aneinanderketten von vier Punktfaktoren entstehende Produkt ist also selbst wieder ein Punkt, und es liegt nahe, diese Beziehung zu verallgemeinern und z. B. auch unter dem Produkte zweier Stäbe einen Punkt, naturgemäfs den Schnittpunkt ihrer Geraden zu verstehen. Hierbei kann man dann über die Masse des so als Produkt dargestellten Schnittpunktes noch nach Willkür verfügen und wird sich dabei am besten das Ziel stecken, die Wahl so zu treffen, dafs die Rechengesetze für die neue Art der Multiplikation möglichst einfach werden. Dies wird um so notwendiger, als für die neue Produktbildung nicht einmal mehr das assoziative Gesetz volle Gültigkeit hat. In der That wird keineswegs $[ab \cdot cd] = [abc \cdot d]$ gesetzt werden dürfen; denn das rechte Produkt bedeutet nach Obigem ein Vielfaches des Punktes d, während das linke nach der soeben gegebenen Erklärung den Schnittpunkt e der beiden Stäbe $[ab]$ und $[cd]$ darstellen soll (vgl. Fig. 28). Auch sieht man sofort, dafs es gar nicht möglich ist, das assoziative Gesetz festzuhalten; denn jedenfalls mufs das Produkt $[ab \cdot cd]$ seinen Wert bewahren, wenn man mit den Punktfaktoren a und b, c und d Änderungen vornimmt, welche die Stabfaktoren $[ab]$ und $[cd]$ invariant lassen, wenn man also z. B. die Faktoren c und d des zweiten Stabes durch die Punkte c_1 und d_1 ersetzt, welche aus c und d durch Verschiebung des Stabes $[cd]$ in seiner eigenen Linie hervorgehen, d. h. es mufs sicher die Gleichung gelten

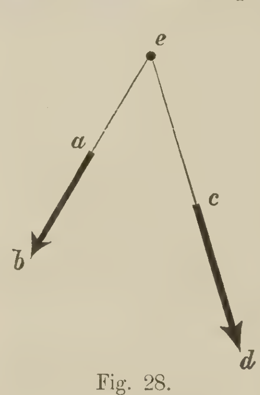


Fig. 28.

$$[ab \cdot cd] = [ab \cdot c_1 d_1].$$

Wollte man nun ganz allgemein das assoziative Gesetz bestehen lassen, so würde auch

$$[ab \cdot cd] = [abc]d = [abc_1]d_1$$

gesetzt werden müssen, d. h. das Produkt $[ab \cdot cd]$ würde, da der Punkt d_1 in der Geraden des Stabes $[cd]$ beliebig angenommen werden kann, jedem beliebigen Punkte der Geraden cd gleich werden und also unendlich vieldeutig sein. Wir müssen daher bei Produkten von der Form $[ab \cdot cd]$ auf das Fortbestehen des assoziativen Gesetzes verzichten, und haben demgemäfs die Aufgabe, wenigstens die übrigen Gesetze der neuen Produktbildung durch passende Wahl der Masse des Produktpunktes thunlichst einfach zu gestalten.

Da sich zwei Stäbe einer Ebene wegen ihrer Verschiebbarkeit in der eigenen Linie stets als Produkte darstellen lassen, deren erster Faktor ihr Schnittpunkt a ist, so wird es vor allem darauf ankommen, ein Produkt von der Form

$$[ab \cdot ac]$$

zu definieren. Man weifs bereits, dafs das Produkt ein Vielfaches des Punktes a bedeuten soll, und es erscheint daher am natürlichsten, die Definitionsgleichung aufzustellen

78) $$[ab \cdot ac] = [abc]a,$$

also unter dem Produkt zweier Stäbe ihren Schnittpunkt zu verstehen, belastet mit der Flächenzahl desjenigen Blattes, welches die beiden Stäbe bestimmen, wenn man sie nach ihrem Schnittpunkte verschiebt.

Da die durch diese Gleichung definierte Art der Multiplikation von Gröfsen höherer Stufe (Stäben) zu Gröfsen niederer Stufe (Punkten) zurückführt, so möge sie den Namen „regressive Multiplikation" erhalten, im Gegensatze zur äufseren Multiplikation, welche aus Gebilden niederer Stufe (Punkten und Strecken) Gebilde höherer Stufe (Stäbe, Felder, Blätter) erzeugte und in diesem Sinne auch als „progressive Multiplikation" bezeichnet wird.

Es bleibt aber jetzt noch der Nachweis zu erbringen, dafs die neue Verknüpfung überhaupt als Multiplikation aufgefafst werden darf. Dazu hat man insbesondere zu zeigen, dafs die Verknüpfung dem Gesetze der Distributivität unterliegt, dafs sie also den Gleichungen genügt

79) . . . . $[(A_1 + A_2)B] = [A_1 B] + [A_2 B]$ und

80) . . . . $[B(A_1 + A_2)] = [BA_1] + [BA_2]$.

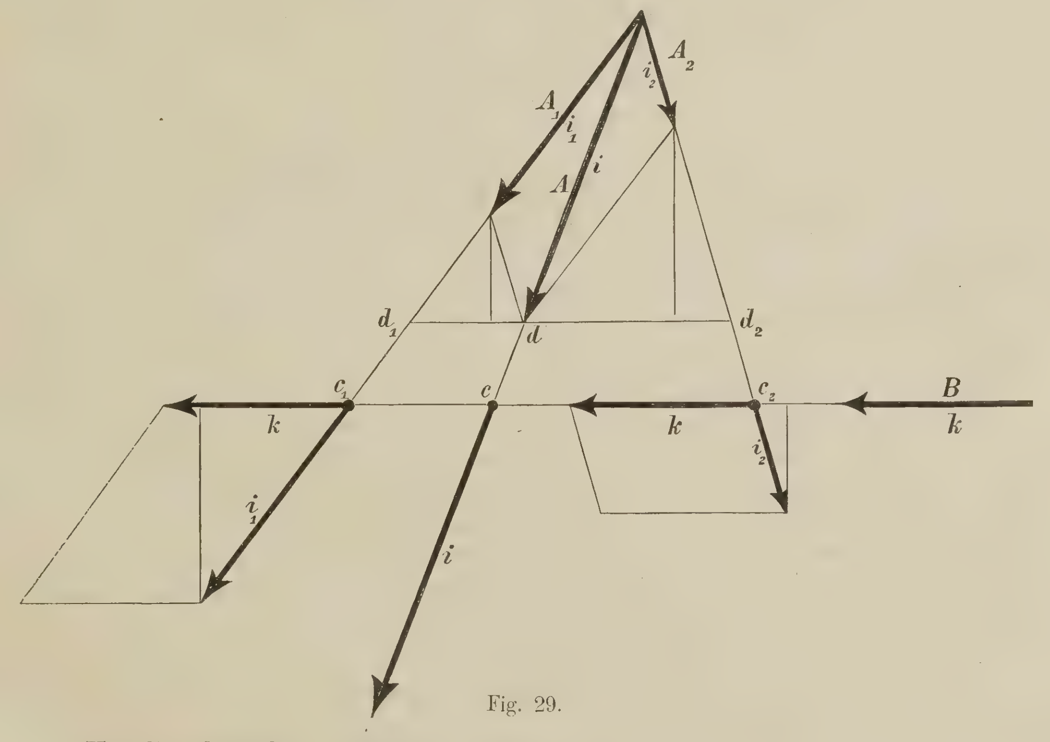


Fig. 29.

Um dies darzuthun, setze man noch

81) . . . . $A_1 + A_2 = A$

(vgl. Fig. 29) und bezeichne die drei einfachen Punkte, in denen die drei Stäbe A, A_1, A_2 von dem Stabe B geschnitten werden, mit c, c_1, c_2; ferner die Strecken der vier Stäbe A, A_1, A_2 und B mit i, i_1, i_2 und k, wo dann wieder

82) . . . . $i_1 + i_2 = i$

wird. Dann läfst sich die zunächst zu beweisende Gleichung 81) in der Form schreiben

83) . . . . $[AB] = [A_1 B] + [A_2 B]$

oder, wenn man die vier Stäbe A, A_1, A_2 und B als Produkte aus den auf ihnen liegenden einfachen Punkten c, c_1, c_2 und den Stabstrecken i, i_1, i_2 und k darstellt, in der Form

84) . . . . $[ci \cdot ck] = [c_1 i_1 \cdot c_1 k] + [c_2 i_2 \cdot c_2 k]$.

Nach der Erklärungsformel 78) des regressiven Produktes läfst sich aber diese Gleichung ersetzen durch die neue Gleichung

85) . . . . $[cik]c = [c_1 i_1 k]c_1 + [c_2 i_2 k]c_2$,

deren Richtigkeit somit jetzt zu prüfen ist.

Die Gleichung sagt aus, dafs der mit der Masse $[cik]$ belastete Punkt c der Schwerpunkt der beiden mit den Massen $[c_1 i_1 k]$ und $[c_2 i_2 k]$ beschwerten Punkte c_1 und c_2 sei. Man hat also zu zeigen, dafs

erstens der Massenfaktor des Punktes c gleich der Massensumme der Summanden ist, d. h. dafs die Gleichung besteht

86) . . . . $[cik] = [c_1 i_1 k] + [c_2 i_2 k]$, und

zweitens, dafs sich die Abstände des Punktes c von den Punkten c_1 und c_2 umgekehrt wie die Massenfaktoren $[c_1 i_1 k]$ und $[c_2 i_2 k]$ dieser Punkte verhalten.

Die Massengleichung 86) folgt nun aber sofort aus der Gleichung 82), wenn man diese zunächst mit der Strecke k multipliziert, wodurch die Feldgleichung hervorgeht

87) . . . . $[ik] = [i_1 k] + [i_2 k]$,

und dann die Felder $[ik]$, $[i_1 k]$, $[i_2 k]$ durch die gleich grofsen Blätter $[cik]$, $[c_1 i_1 k]$, $[c_2 i_2 k]$ ersetzt.

Dafs aber auch zweitens der Punkt c die Linie $c_1 c_2$ im umgekehrten Verhältnisse der Blätter $[c_1 i_1 k]$ und $[c_2 i_2 k]$, oder was bei der Gleichheit ihrer Grundseiten auf dasselbe hinauskommt, im umgekehrten Verhältnisse der zugehörigen Blatthöhen teilt, ergiebt sich sogleich, wenn man noch durch die vierte Ecke d des durch die Stäbe A_1 und A_2 bestimmten Parallelogramms die Parallele zur Linie $c_1 c_2$ zieht bis zu den Schnittpunkten d_1 und d_2 mit den Stäben A_1 und A_2. Dann stimmen die Höhen der entstehenden Dreiecke mit den Höhen der jedesmal nicht anliegenden Blätter überein. Da aber die beiden Dreiecke ähnlich sind, verhalten sich ihre Grundseiten wie ihre Höhen, oder also nach Obigem umgekehrt wie die Höhen der anliegenden Blätter, d. h. der Punkt d teilt die Linie $d_1 d_2$ im umgekehrten Verhältnis der beiden Blatthöhen. In demselben Verhältnis teilt aber auch der Punkt c die Linie $c_1 c_2$.

Damit ist aber die Gültigkeit der ersten Distributivitätsformel 79) bewiesen. Um auch die zweite Formel 80) zu entwickeln, leite man zunächst aus der Definitionsgleichung 78) die Vertauschungsformel für Stäbe ab. Es seien $B = [ab]$ und $C = [ac]$ zwei beliebige Stäbe; dann wird ihr Produkt

$$[CB] = [ac \cdot ab] = [acb]a = -[abc]a = -[ab \cdot ac] = -[BC],$$

d. h. man erhält die Gleichung

88) . . . . $[CB] = -[BC]$, welche besagt:

Zwei Stabfaktoren sind (gerade so wie zwei Punktfaktoren) nur mit Zeichenwechsel vertauschbar.

Diese Gleichung ergiebt dann in der That die zweite Distributivitätsformel 80) als unmittelbare Folge der ersten.

Durch dieselben Schlüsse wie oben auf S. 7 folgt ferner aus den Gleichungen 79) und 80) das Bestehen der entsprechenden Differenzgleichungen

$$89) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} [(A_1 - A_2)B] = [A_1 B] - [A_2 B] \\ [B(A_1 - A_2)] = [BA_1] - [BA_2], \end{cases}$$

sowie der Gleichungen für die Verstellbarkeit eines Zahlfaktors

$$90) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} [\mathfrak{n}A \cdot B] = \mathfrak{n}[AB] \\ [B \cdot \mathfrak{n}A] = \mathfrak{n}[BA]. \end{cases}$$

Die letzten Gleichungen aber ermöglichen es wieder, der Definitionsgleichung 78) des regressiven Produktes noch zwei andere Formen zu verleihen. Stellt man nämlich in den Produkten $[ab]$ und $[abc]$ der Gleichung 78) die Faktoren a und b um, so ändert sowohl die linke wie die rechte Seite ihr Zeichen, die Gleichung bleibt also bestehen, und man erhält

$$[ba \cdot ac] = [bac]a;$$

und vertauscht man jetzt wieder in den Produkten $[ac]$ und $[bac]$ die Faktoren a und c, so ergiebt sich die neue Gleichung

$$[ba \cdot ca] = [bca]a.$$

Schliefslich kann man dann noch in den beiden letzten Formeln die Bezeichnung so ändern, dafs rechter Hand jedesmal wieder, wie in 78), das Produkt $[abc]$ auftritt, und bekommt so die beiden Formeln

$$91) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [ab \cdot bc] = [abc]b$$

$$92) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [ac \cdot bc] = [abc]c,$$

welche mit der Erklärungsformel 78) durchaus gleichwertig sind.

Die Vertauschungsformel 88) führt aber ferner noch bei der Anwendung auf zwei gleiche Faktoren zu einer Stabformel, welche der Grundformel 19) der äufseren Multiplikation genau entspricht und daher die Grundformel der regressiven Multiplikation heifsen mag. Setzt man nämlich in der Formel 88) den Stab $C = B$, so nimmt sie die Gestalt an

$$[BB] = -[BB] \quad \text{oder}$$

$$2[BB] = 0 \quad \text{oder endlich}$$

$$93) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [BB] = 0.$$

Diese Grundformel der regressiven Multiplikation zeigt, dafs auch das (regressive) Produkt zweier Stäbe nicht nur verschwindet, wenn ein Faktor null ist, sondern auch, wenn seine beiden Faktoren einander gleich werden.

Die Übereinstimmung in den beiden Grundformeln bedingt es, dafs zwischen dem (regressiven) Produkt zweier Stäbe und dem (progressiven) Produkt zweier Punkte eine vollkommene Dualität herrscht, und dafs insbesondere sämtliche oben für Produkte zweier Punkte abgeleitete Formeln erhalten bleiben, wenn man in ihnen die Punkte durch Stäbe ersetzt. So folgt wieder aus 93) mit Rücksicht auf 90) die allgemeinere Formel

$$94) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [B \cdot \mathfrak{n}B] = 0, \quad \text{welche den Satz enthält:}$$

Das Produkt zweier Stäbe, welche derselben geraden Linie angehören, verschwindet.

Nach dem distributiven Gesetze ergiebt sich ferner aus 94) wieder die Formel der linealen Änderung

$$95) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [(A + \mathfrak{n}B)B] = [AB],$$

welche, wie das distrubutive Gesetz 78) überhaupt, eine Lagen- und eine Gröfsenbeziehung ausdrückt;

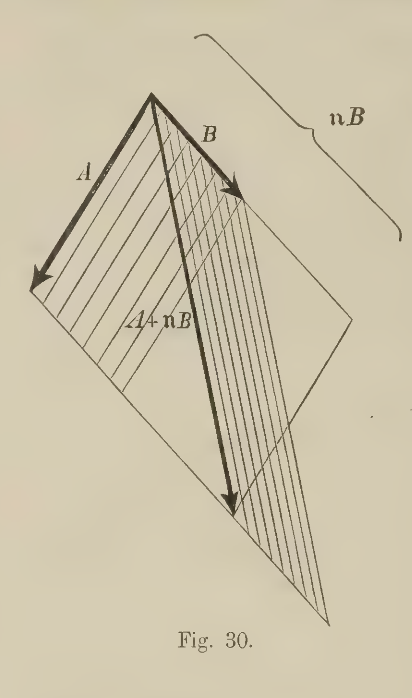


Fig. 30.

erstens nämlich sagt sie aus, dafs die beiden Stäbe A und $A+\mathfrak{n}B$ von dem Stabe B in dem nämlichen Punkte geschnitten werden;

zweitens aber enthält sie den Satz:

„Parallelogramme, welche zwischen Parallelen liegen und gleiche Grundlinien haben, sind einander gleich" (vgl. Fig. 30).

Es ist aber von besonderem Interesse, dafs die Dualität zwischen Punkt- und Stabprodukten auch erhalten bleibt, wenn man zu dreifaktorigen Stabprodukten übergeht. Für solche Produkte bedarf es nicht mehr einer neuen Begriffsbestimmung. Denn, da das zweifaktorige Stabprodukt einen Punkt darstellt, so ist das dreifaktorige Stabprodukt das Produkt eines Punktes und eines Stabes, d. h. also ein Blatt, und wird daher gerade so wie das Produkt dreier Punkte durch eine blofse Zahl ausgedrückt, womit die Dualität bereits nach einer Richtung hin erwiesen ist. Um aber auch die Übereinstimmung in den Rechengesetzen der dreifaktorigen Stab- und Punktprodukte darzulegen, hat man zu zeigen, dafs auch das Produkt dreier Stäbe distributiv und associativ ist, dafs also die Gleichungen bestehen

96) . . . . $[AB(C+D)]=[ABC]+[ABD]$ und

97) . . . . $[A(BC)]=[ABC]$.

Zum Beweise der Distributivitätsformel führe man alles auf Punkte zurück; man setze daher etwa das Produkt

98) . . . . $[AB]=p$,

wo dann also p den (mit einer gewissen Masse belasteten) Schnittpunkt der Stäbe A und B bedeutet, und stelle die Stäbe C und D als Produkte dar, deren erster Faktor ihr Schnittpunkt q ist, setze somit

99) . . . . $C=[qc]$ und $D=[qd]$. Dann wird

$$[AB(C+D)]=[p(qc+qd)] \quad \text{oder nach 15)}$$
$$=[p\cdot q(c+d)], \quad \text{d. h. nach 49)}$$
$$=[pq(c+d)], \quad \text{also nach 48)}$$
$$=[pqc]+[pqd], \quad \text{dies wieder nach 49)}$$
$$=[p\cdot qc]+[p\cdot qd], \quad \text{oder nach 99)}$$
$$=[pC]+[pD], \quad \text{und dies endlich nach 98)}$$
$$=[ABC]+[ABD].$$

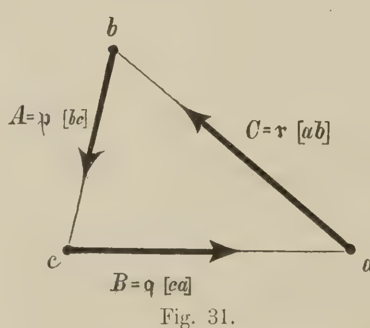


Fig. 31.

Beim Beweise der Formel 97) verfahre man entsprechend; man bezeichne die Schnittpunkte der Stäbe

B und C, C und A, A und B

mit a, b, c;

dann lassen sich die drei Stäbe in der Form darstellen

100) $A=\mathfrak{p}[bc]$, $B=\mathfrak{q}[ca]$, $C=\mathfrak{r}[ab]$

(vgl. Fig. 31), und es wird

$$[A(BC)] = [\mathfrak{p}[bc](\mathfrak{q}[ca] \cdot \mathfrak{r}[ab])] \quad \text{oder nach 90)}$$
$$= [\mathfrak{p}[bc](\mathfrak{q}\mathfrak{r}[ca \cdot ab])], \quad \text{also nach 91)}$$
$$= [\mathfrak{p}[bc](\mathfrak{q}\mathfrak{r} \cdot [cab]a)] \quad \text{oder nach 18)}$$
$$= [(\mathfrak{p}b)c(\mathfrak{q}\mathfrak{r} \cdot [cab]a)] \quad \text{oder nach 53), da auch } [cab]$$

eine Zahl ist,

$$= \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}[cab][bca], \quad \text{also nach 56)}$$

101) . . . . $[A(BC)] = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}[abc]^2.$

Andererseits wird

$$[ABC] = [(AB)C]$$
$$= [(\mathfrak{p}[bc] \cdot \mathfrak{q}[ca]) \cdot \mathfrak{r}[ab]] \quad \text{oder nach 90)}$$
$$= [(\mathfrak{p}\mathfrak{q}[bc \cdot ca]) \cdot \mathfrak{r}[ab]], \quad \text{also nach 91)}$$
$$= [(\mathfrak{p}\mathfrak{q} \cdot [bca]c) \cdot \mathfrak{r}[ab]], \quad \text{oder nach 18)}$$
$$= [(\mathfrak{p}\mathfrak{q} \cdot [bca]c) \cdot [\mathfrak{r}a \cdot b]] \quad \text{oder nach 49)}$$
$$= [(\mathfrak{p}\mathfrak{q} \cdot [bca]c) \cdot \mathfrak{r}a \cdot b], \quad \text{d. h. nach 53), da auch}$$

$[bca]$ eine Zahl ist,

$$= \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}[bca][cab], \quad \text{also nach 56)}$$

102) . . . . $[ABC] = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}[abc]^2,$

d. h. man erhält denselben Ausdruck wie für die linke Seite.

Damit hat man also wirklich auch die Formeln 48) und 49) dual übertragen. Aus ihnen aber und den Formeln für zweifaktorige Punktprodukte, deren Dualformeln bereits oben entwickelt sind, wurden sämtliche weiteren Formeln für dreifaktorige Punktprodukte abgeleitet.

Alle diese Formeln bleiben daher bestehen, wenn man in ihnen die Punkte durch Stäbe, d. h. die kleinen lateinischen Buchstaben durch grofse ersetzt. Dies gilt insbesondere von den Formeln 50) bis 57), sowie endlich auch noch von der Formel 63), welche bei dieser Umwandlung in die Gleichung übergeht

103) . . . . $[AB(\mathfrak{p}A + \mathfrak{q}B)] = 0.$

Sie enthält den Satz:

Das Produkt dreier Stäbe, deren Linien sich in dem nämlichen Punkte schneiden, verschwindet.

Zur Vervollständigung der dualen Beziehung zwischen Punkt- und Stabgröfsen ist endlich noch der Nachweis nötig, dafs auch die Grundformeln 78), 91) und 92) eine Ersetzung der Punkte durch Stäbe gestatten, dafs also auch die Formeln gelten

104) . . . . $[AB \cdot AC] = [ABC]A,$

105) . . . . $[AB \cdot BC] = [ABC]B,$

106) . . . . $[AC \cdot BC] = [ABC]C.$

Um die erste von diesen drei Formeln zu beweisen, benutze man wieder für die drei Stäbe A, B, C die Darstellung 100). Dann erhält man für die linke Seite der Gleichung 104)

$$[AB \cdot AC] = [(\mathfrak{p}[bc] \cdot \mathfrak{q}[ca])(\mathfrak{p}[bc] \cdot \mathfrak{r}[ab])], \quad \text{also nach 90)}$$
$$= [(\mathfrak{p}\mathfrak{q}[bc \cdot ca])(\mathfrak{p}\mathfrak{r}[bc \cdot ab])] \quad \text{oder, da}$$
$$[bc \cdot ca] = [bca]c \quad \text{nach 91), und dies}$$
$$= [abc]c \quad \text{nach 56), und ferner}$$
$$[bc \cdot ab] = -[bc \cdot ba] \quad \text{nach 21) und 90),}$$
$$= -[bca]b \quad \text{nach 78),}$$

$$= -[abc]b \quad \text{nach 56), so wird}$$

$$\begin{aligned}
[AB \cdot AC] &= [(\mathfrak{p}\mathfrak{q} \cdot [abc]c)(\mathfrak{p}\mathfrak{r} \cdot (-[abc])b)], \quad \text{d. h. nach 18)} \\
&= -\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}\mathfrak{r}[abc]^2[cb] \quad \text{oder nach 21)} \\
&= \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}\mathfrak{r}[abc]^2[bc], \quad \text{also mit Rücksicht auf 102)} \\
&= [ABC] \cdot \mathfrak{p}[bc], \quad \text{d. h. nach 100)} \\
[AB \cdot AC] &= [ABC]A.
\end{aligned}$$

Die beiden anderen Formeln 105) und 106) endlich ergeben sich, genau wie oben die entsprechenden Punktformeln, aus der Hauptformel 104) und zwar unter Anwendung der Gleichungen 21), 18) und 55).

Damit ist die Dualität zwischen Stab- und Punktprodukten für sämtliche oben entwickelten Formeln bewiesen, die beiden betrachteten Multiplikationsarten, die progressive und die regressive Multiplikation stimmen somit — bei aller ihrer begrifflichen Verschiedenheit — in ihren formalen Gesetzen durchaus miteinander überein. Um dieser Thatsache noch einen besonders scharfen Ausdruck zu verleihen, hat man auch wohl beide Multiplikationsarten unter einem gemeinsamen Namen, nämlich als „planimetrische Multiplikation“ zusammengefafst. Der enge Zusammenhang beider Multiplikationsarten wird sich späterhin dadurch besonders nützlich erweisen, dafs er es ermöglicht, aus den geometrischen Beziehungen zwischen Punkten solche zwischen Stäben analytisch durch eine blofse Buchstabenvertauschung abzuleiten.

(Fortsetzung folgt.)

Halle a. S., Buchdruckerei des Waisenhauses.

PUNKTRECHNUNG UND PROJEKTIVE GEOMETRIE.

ZWEITER TEIL:
GRUNDLAGEN DER PROJEKTIVEN GEOMETRIE

VON

DR. HERMANN GRASSMANN,
OBERLEHRER AN DER LATEINISCHEN HAUPTSCHULE ZU HALLE A. S.

SEPARATABZUG AUS DEM PROGRAMM DER LATEINISCHEN HAUPTSCHULE ZU HALLE A. S.

OSTERN 1896.



Vierter Abschnitt*).

Das Vereinungsgesetz. Die Zurückleitung eines Punktes und eines Stabes.

Die im letzten Abschnitte entwickelten Grundformeln der planimetrischen Multiplikation lassen sich noch auf eine andere Form bringen, in der sie für die analytische Behandlung der Projektion eines Punktes und eines Stabes besonders geeignet sind. Führt man nämlich in den beiden sich dualistisch entsprechenden Formeln

91) . . . . $[ab \cdot bc] = [abc]b$ und

105) . . . . $[AB \cdot BC] = [ABC]B$,

in denen wie bisher die kleinen Buchstaben Punkte, die grofsen aber Stäbe bezeichnen, für die beiden Produkte $[ab]$ und $[AB]$ kurze Bezeichnungen ein, setzt also etwa

107) . . . . $[ab] = A$ und

108) . . . . $[AB] = a$,

so nehmen jene beiden Formeln die Gestalt an

109) . . . . $[A \cdot bc] = [Ac]b$ und

110) . . . . $[a \cdot BC] = [aC]B$.

Diese Formeln sind damit freilich nur unter gewissen Voraussetzungen über die in ihnen vorkommenden Gröfsen A und a bewiesen, die Formel 109) nämlich unter der Voraussetzung, dafs der Stab A sich auf die Form 107) bringen lasse, dafs er also durch den Punkt b hindurchgehe, und die Formel 110) unter der Voraussetzung, dafs der Punkt a sich in der Form $[AB]$ darstellen lasse, dafs er also auf der Geraden des Stabes B liege.

Aber es fragt sich noch, ob diese beiden Bedingungen für das Bestehen der Gleichungen 109) und 110) auch erforderlich sind.

Zunächst stellt *die rechte Seite* von 109), wie auch A beschaffen sein mag, den mit einem Zahlfaktor multiplizierten Punkt b dar. *Die linke Seite* dieser Gleichung kann aber, da das Produkt zweier Stäbe der Schnittpunkt ihrer Geraden ist, nur dann dieselbe Bedeutung besitzen, wenn die Gerade des Stabes A von der Geraden des Stabes $[bc]$ im Punkte b getroffen wird.

Andererseits stellt *die rechte Seite* von 110) ein Vielfaches des Stabes B dar. *Die linke Seite* dieser Gleichung aber kann als Produkt zweier Punktfaktoren, von denen der eine $[BC]$ ein Punkt der Geraden B ist, nur dann ein Vielfaches des Stabes B ausdrücken, wenn auch der andere Faktor a in der Geraden des Stabes B liegt.

---

*) Die drei ersten Abschnitte der vorliegenden Arbeit bilden einen Beitrag für die Festschrift der Lateinischen Hauptschule zur zweihundertjährigen Jubelfeier der Universität Halle-Wittenberg (Halle, 1894) mit dem Titel: Punktrechnung und projektive Geometrie. Erster Teil: Punktrechnung.

In beiden Fällen sind also die für das Bestehen der Gleichungen 109) und 110) angegebenen Bedingungen nicht nur hinreichend, sondern auch erforderlich.

Man kann nun aber den beiden Formeln 109) und 110) noch zwei andere Formeln an die Seite stellen, die zu ihnen in Bezug auf die erste und dritte Gröfse der linken Seite dual sind, nämlich die Formeln

111) . . . . $a[bC]=[aC]b$ und

112) . . . . $A[Bc]=[Ac]B.$

In diesen Formeln sind die Ausdrücke in den scharfen Klammern als Produkte eines Punktes und eines Stabes blofse Zahlgröfsen. Für das Bestehen der beiden Formeln ist daher erforderlich, dafs die Punkte a und b in der ersten Formel und die Stäbe A und B in der zweiten sich von einander nur um einen Zahlfaktor unterscheiden, dafs also etwa

113) . . . . $b=\mathfrak{g}a$ und

114) . . . . $B=\mathfrak{h}A$

sei, unter $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ zwei Zahlfaktoren verstanden.

Die Gleichungen 113) und 114) sind aber für das Bestehen der Gleichungen 111) und 112) zugleich auch hinreichend. Denn wenn die Gröfsen a und b, A und B den Gleichungen 113) und 114) genügen, so ergeben sich die Formeln 111) und 112) unmittelbar aus den Formeln 62), welche die Verstellbarkeit eines Zahlfaktors aussprechen.

Schliefslich kann man noch die vier Formeln 109) — 112) und die Bedingungen, an die sie geknüpft sind, unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zusammenfassen. Dazu führe man noch den Begriff der Incidenz ein.

Man nennt nämlich zwei Punkte incident, wenn sie denselben Ort haben, sich also höchstens durch ihre Masse unterscheiden; zwei Stäbe, wenn sie derselben Geraden angehören; endlich einen Punkt und einen Stab, wenn der Punkt auf der Geraden des Stabes liegt.

Bezeichnet man ferner für den Augenblick die in den vier Formeln vorkommenden Faktoren in derjenigen Reihenfolge, in der sie auf der linken Seite auftreten, mit I, II, III, so kann man die vier Formeln unter dem Typus zusammenfassen:

115) . . . . $[\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}\,\mathrm{III}]=[\mathrm{I}\,\mathrm{III}]\,\mathrm{II}.$

Diese Formel ist gültig, sobald

erstens die Stufensumme der beiden Faktoren I und III gleich drei ist, so dafs also ihr Produkt eine Zahl wird, und zugleich

zweitens die Gröfse II mit der Gröfse I incident ist.

Die Formel 115) vertritt gleichsam das für die planimetrische Multiplikation nicht mehr allgemein gültige associative Gesetz*) und möge das Vereinungsgesetz der planimetrischen Multiplikation genannt werden.

Unter der *Zurückleitung eines Punktes x auf den Stab A unter Ausschlufs des Punktes b* (vgl. Fig. 32) soll derjenige Punkt y verstanden werden, der

erstens der Geraden des Stabes A angehört, und der

zweitens der Gleichung

116) . . . . $y+z=x$

*) Vgl. jedoch die Formeln 49) und 97).

genügt, in welcher der zweite Summand z einen mit dem Punkte b incidenten Punkt bedeutet, wo also

117) . . . . $z = \mathfrak{k} b$

ist, unter $\mathfrak{k}$ einen Zahlfaktor verstanden. Man kann dann die Gleichung 116) auch in der Form schreiben

$$y + \mathfrak{k} b = x.$$

Aus dieser Erklärung geht schon hervor, dafs die Zurückleitung y unabhängig sein wird von der Länge des Stabes A, auf den zurückgeleitet wird, und von der Masse des ausgeschlossenen Punktes b, dafs sie also nur abhängt von der *Lage der Geraden des Stabes A* und der *Lage des Punktes b.* Man nennt daher jene Gerade „das Grundgebiet der Zurückleitung“ und diesen Punkt, sofern an ihm nur seine *Lage* in Betracht gezogen wird, „das Leitgebiet der Zurückleitung“. Doch wird es keinen Verwechselungen Raum geben, wenn wir auch kurz von dem Grundgebiete A und dem Leitgebiete b sprechen (statt von dem Stabe A, der das Grundgebiet bestimmt, u. s. w.).

Will man die Zurückleitung y durch die zurückgeleitete Gröfse x, das Grundgebiet A und das Leitgebiet b *allein* ausdrücken, so multipliziere man die letzte Gleichung zuerst planimetrisch mit dem Leitgebiete b und erhält wegen Gleichung 20)

$$[y b] = [x b].$$

Diese Gleichung multipliziere man dann planimetrisch mit dem Grundgebiete A und bekommt

$$[A \cdot y b] = [A \cdot x b].$$

Fig. 32.

Auf die linke Seite dieser Gleichung läfst sich aber das Vereinungsgesetz anwenden (vgl. die Gl. 115 oder die besondere Gl. 109), dessen Bedingungen erfüllt sind, da nach der Voraussetzung y auf der Geraden des Stabes A liegt. Nach ihm wird die linke Seite $= [A b] y$. Die Gleichung verwandelt sich daher in

$$[A b] y = [A \cdot x b],$$

und man erhält also für die Zurückleitung y die Darstellung

118) . . . . $y = \dfrac{[A \cdot x b]}{[A b]}.$

Der in dieser Entwickelung verwendete Hülfspunkt z läfst sich ebenfalls als Zurückleitung des Punktes x auffassen, nämlich als *Zurückleitung des Punktes x auf den Punkt b unter Ausschlufs des Stabes A.* Denn es erscheint nur naturgemäfs, den auf S. 32 aufgestellten Begriff der Zurückleitung eines Punktes dualistisch in Bezug auf das Grundgebiet und Leitgebiet in der Weise zu erweitern, dafs man unter der Zurückleitung des Punktes x auf den Punkt b unter Ausschlufs des Stabes A denjenigen Punkt z versteht, der

erstens mit dem Grundgebiete b incident ist, und der

zweitens der Gleichung

116) . . . . $y + z = x$

genügt, wo der andere Summand y dem Leitgebiete A angehört. Diese Bedingungen erfüllt aber gerade der schon oben benutzte Punkt z.

Die Zurückleitung z unterscheidet sich von der Zurückleitung y nur dadurch, dafs das Grundgebiet und das Leitgebiet mit einander vertauscht sind. Sie giebt ferner zu der Zurückleitung y addiert gerade die zurückgeleitete Gröfse x und möge daher die zu der Zurückleitung y ergänzende Zurückleitung genannt werden.

Auch die Zurückleitung z läfst sich wieder durch die zurückgeleitete Gröfse x, das Grundgebiet b und das Leitgebiet A ausdrücken. In der That, multipliziert man die Gleichung 116) planimetrisch mit dem Leitgebiete A und berücksichtigt dabei, dafs der Punkt y der Geraden des Stabes A angehört, dafs also $[yA]=0$ wird, so erhält man

$$[zA]=[xA];$$

und multipliziert man diese Gleichung mit dem Grundgebiete b, so ergiebt sich

$$b[zA]=b[xA].$$

Wegen der Incidenz von z und b ist aber nach dem Vereinungsgesetz (Gl. 115, 111) die linke Seite dieser Gleichung $=[bA]z$. Die Gleichung verwandelt sich daher in

$$[bA]z=b[xA],$$

und man findet somit für z den Wert

$$z=\frac{b[xA]}{[bA]}. \tag{119}$$

Setzt man schliefslich noch die Werte 118) und 119) in die Gleichung 116) ein und stellt zugleich im Nenner von 119) die Faktoren um, was nach 61) erlaubt ist, so erhält man für x die Zerlegungsformel

$$x=\frac{[A\cdot xb]+b[xA]}{[Ab]}. \tag{120}$$

Durch sie wird der Punkt x als die Summe zweier Punkte (gleichsam zweier Komponenten) $\frac{[A\cdot xb]}{[Ab]}$ und $\frac{b[xA]}{[bA]}$ dargestellt, von denen der eine in der Geraden des Stabes A liegt, während der andere mit dem Punkte b zusammenfällt.

Unter der *Zurückleitung eines Stabes U auf einen Punkt a unter Ausschlufs eines Stabes B* (vgl. Fig. 33) soll derjenige Stab V verstanden werden, dessen Gerade

erstens durch den Punkt a (das Grundgebiet) hindurchgeht, und der zweitens der Gleichung

$$V+W=U \tag{121}$$

genügt, in welcher der andere Summand W einen Stab bedeutet, der in der Geraden des Stabes B (dem Leitgebiet) liegt und also in der Form

$$W=\mathfrak{k}B \tag{122}$$

darstellbar ist.

Will man wieder die Zurückleitung V durch den zurückgeleiteten Stab U, das Grundgebiet a und das Leitgebiet B ausdrücken, so multipliziere man die Gleichung 121) wie oben zuerst planimetrisch mit dem Leitgebiete B und berücksichtige dabei, dafs das Produkt $[WB]$ wegen 122) verschwindet. So erhält man

$$[VB]=[UB].$$

Sodann multipliziere man diese Gleichung mit dem Grundgebiete a und findet

$$[a\cdot VB]=[a\cdot UB].$$

Da nun aber nach der Voraussetzung V mit a incident ist, so ist nach dem Vereinungsgesetz (Gl. 115, 110) die linke Seite $=[aB]V$; die Gleichung geht daher über in

$$[aB]\,V = [a \cdot UB],$$

und man erhält für die Zurückleitung V den Wert

$$123) \quad V = \frac{[a \cdot UB]}{[aB]}.$$

Der in dieser Entwickelung benutzte Hülfsstab W ist wieder die zu V ergänzende Zurückleitung von U, nämlich die *Zurückleitung von U auf das Grundgebiet B unter Ausschlufs des Leitgebietes a.* Denn er ist

erstens mit dem Grundgebiete B dieser Zurückleitung incident und genügt zweitens der Gleichung

$$121) \quad V + W = U,$$

wo der andere Summand V mit dem Leitgebiete a incident ist.

Um den Stab W durch U, a und B auszudrücken, multipliziere man die Gleichung 121) wie sonst zuerst planimetrisch mit dem Leitgebiete a und berücksichtige dabei, dafs die Gerade des Stabes V durch den Punkt a hindurchgeht, dafs also

$$[Va] = 0$$

ist (vgl. Gl. 66); man erhält daher

$$[Wa] = [Ua].$$

Sodann multipliziere mit dem Grundgebiete B und findet

$$B[Wa] = B[Ua].$$

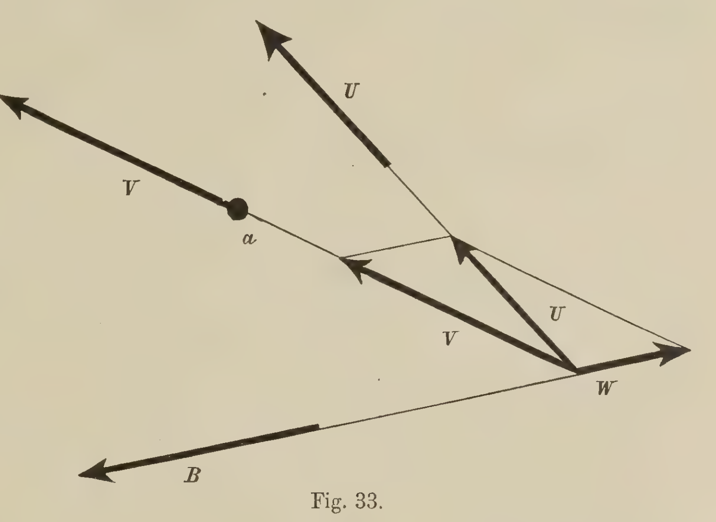


Fig. 33.

Da nun aber nach der Voraussetzung die Stäbe B und W incident sind, so wird nach dem Vereinungsgesetz (Gl. 115, 112) die linke Seite $= [Ba]\,W$, und die Gleichung verwandelt sich in

$$[Ba]\,W = B[Ua],$$

so dafs sich für die Zurückleitung W der Wert ergiebt

$$124) \quad W = \frac{B[Ua]}{[Ba]}.$$

Setzt man endlich die Werte 123) und 124) für die beiden Zurückleitungen in die Gleichung 121) ein und stellt zugleich im Nenner von 124) die Faktoren um, so bekommt man für U die Zerlegungsformel

$$125) \quad U = \frac{[a \cdot UB] + B[Ua]}{[aB]},$$

durch die der Stab U als die Summe zweier Stäbe (zweier Komponenten) $\frac{[a \cdot UB]}{[aB]}$ und $\frac{B[Ua]}{[Ba]}$ dargestellt wird, von denen der eine durch den Punkt a hindurchgeht, während der andere in der Geraden des Stabes B liegt.

Neben den Zerlegungsformeln 120) und 125), durch die ein Punkt oder Stab als Resultante *zweier* Komponenten dargestellt wurde, sind aber für das Folgende auch Zerlegungen in *drei* Komponenten von Interesse. Sind zuerst a, b, c drei nicht in gerader Linie liegende *Punkte*, so läfst sich jeder beliebige Punkt x ihrer Ebene als Vielfachensumme von a, b, c, das heifst, in der Form

126) . . . . $x = \mathfrak{x}\, a + \mathfrak{y}\, b + \mathfrak{z}\, c$

darstellen. Um die hier auftretenden Ableitzahlen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch den Punkt x und die Grundpunkte a, b, c auszudrücken, multipliziere man die Gleichung 126) der Reihe nach äufserlich mit den Produkten $[b\,c]$, $[c\,a]$, $[a\,b]$ und erhält

$$[x\,b\,c] = \mathfrak{x}\,[a\,b\,c], \quad [x\,c\,a] = \mathfrak{y}\,[a\,b\,c], \quad [x\,a\,b] = \mathfrak{z}\,[a\,b\,c].$$

Und setzt man die hieraus folgenden Werte für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in die Gleichung 126) ein, so verwandelt sich diese in

127) . . . . $x = \dfrac{[x\,b\,c]\,a + [x\,c\,a]\,b + [x\,a\,b]\,c}{[a\,b\,c]}.$

Damit ist die gewünschte Zerlegung des Punktes x in drei Komponenten geleistet. Diese drei Komponenten lassen sich übrigens auch in der Form schreiben

$$\frac{a\,[x \cdot b\,c]}{[a \cdot b\,c]}, \qquad \frac{b\,[x \cdot c\,a]}{[b \cdot c\,a]}, \qquad \frac{c\,[x \cdot a\,b]}{[c \cdot a\,b]},$$

welche genau der rechten Seite von 119) entspricht. Die drei Gröfsen sind daher nichts anderes als die Zurückleitungen des Punktes x auf das Gebiet der Punkte

$$a, \qquad\qquad b, \qquad\qquad c$$

unter Ausschlufs der gegenüberliegenden Seiten

$$[b\,c], \qquad\qquad [c\,a], \qquad\qquad [a\,b]$$

des Dreiecks $a\,b\,c$.

Genau in derselben Weise, wie sich jeder Punkt x einer Ebene aus drei, nicht in gerader Linie liegenden Punkten a, b, c dieser Ebene numerisch ableiten läfst, kann man auch *jeden Stab* U der Ebene als Vielfachensumme von drei Stäben A, B, C darstellen, deren Linien nicht durch denselben Punkt hindurchgehen. In der That erhält man in ganz entsprechender Weise die Formel

128) . . . . . $U = \dfrac{[U B C]\,A + [U C A]\,B + [U A B]\,C}{[A\,B\,C]},$

also eine Zerlegung des Stabes U in drei Komponenten, die den Geraden der Stäbe A, B, C angehören. Diese Komponenten kann man dann wieder in der Form schreiben

$$\frac{A\,[U \cdot B\,C]}{[A \cdot B\,C]}, \qquad \frac{B\,[U \cdot C\,A]}{[B \cdot C\,A]}, \qquad \frac{C\,[U \cdot A\,B]}{[C \cdot A\,B]},$$

aus der mit Rücksicht auf 124) folgt, dafs sie die Zurückleitungen des Stabes U auf die Geraden der Stäbe

$$A, \qquad\qquad B, \qquad\qquad C$$

unter Ausschlufs der gegenüberliegenden Ecken

$$[B\,C], \qquad\qquad [C\,A], \qquad\qquad [A\,B]$$

des Dreiecks $A\,B\,C$ sind.

Aus jeder der beiden Gleichungen 127) und 128) läfst sich noch eine wichtige Zahlgleichung herleiten, der je fünf beliebige Punkte oder Stäbe einer Ebene unterliegen. Multipliziert man nämlich die beiden Gleichungen planimetrisch mit den Produkten $[x\,d]$ und $[U\,D]$,

in denen d einen ganz beliebigen Punkt der Ebene, D einen beliebigen Stab bezeichnet, so verschwindet in beiden Gleichungen die linke Seite und man erhält die Identitäten

129) . . . $0 = [xbc]\,[xda] + [xca]\,[xdb] + [xab]\,[xdc]$ und

130) . . $0 = [UBC]\,[UDA] + [UCA]\,[UDB] + [UAB]\,[UDC]$,

deren geometrische Bedeutung sich weiter unten ergeben wird.

Fünfter Abschnitt.

Doppelverhältnis. Projektive Punktreihen und Strahlbüschel.

Eine Schar von vier einfachen oder vielfachen Punkten a, b, c, d derselben Geraden, bei der auch die *Reihenfolge der Punkte* in beliebiger aber bestimmter Weise, und zwar unabhängig von ihrer Lage, festgesetzt ist, möge nach von Staudt ein „Punktwurf" genannt werden. Die beiden ersten Punkte a und b und die beiden letzten Punkte c und d sollen zugeordnete Punkte des Punktwurfes heifsen (vgl. Fig. 34).

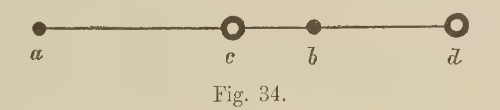


Fig. 34.

Die planimetrischen Produkte von je zwei Punkten eines Wurfes sind als Stäbe derselben Geraden nur um einen Zahlfaktor von einander verschieden und tragen also den Charakter von gleichbenannten Zahlen. Der aus ihnen gebildete Doppelbruch

$$\frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]}$$

ist somit eine unbenannte Zahl. Er wird das Doppelverhältnis des Punktwurfes a, b, c, d genannt und durch das Symbol $(abcd)$ bezeichnet, so dafs also

131) . . . . $(abcd) = \frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]}$

wird.

Aus der Form des Doppelverhältnisses folgt, dafs es seinen Wert nicht ändert,

erstens, wenn man gleichzeitig die Punkte eines jeden Paares zugeordneter Punkte unter sich vertauscht;

zweitens aber auch, wenn man die beiden Paare zugeordneter Punkte mit einander vertauscht.

In der That wird

$$(badc) = \frac{[bd]}{[da]} : \frac{[bc]}{[ca]} = \frac{-[db]}{-[ad]} : \frac{-[cb]}{-[ac]} \qquad \text{(nach Gl. 21)}$$
$$= \frac{[db]}{[ad]} : \frac{[cb]}{[ac]} = \frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = (abcd),$$

d. h. es wird wirklich

132) . . . . $(badc) = (abcd)$.

Andererseits wird

$$(cdab) = \frac{[ca]}{[ad]} : \frac{[cb]}{[bd]} = \frac{-[ac]}{[ad]} : \frac{[cb]}{-[db]} \qquad \text{(Gl. 21)}$$
$$= \frac{[ac]}{[ad]} : \frac{[cb]}{[db]} = \frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = (abcd),$$

also wird in der That auch

133) . . . . $(cdab) = (abcd)$.

Wendet man endlich die Umgestaltung 133) auf die linke Seite von 132) an, so erhält man als vierte Form des Doppelverhältnisses $(abcd)$ den Ausdruck $(dcba)$. Eine weitere Wiederholung der beiden Umformungen 132) und 133) führt dann auf die alten Formen des Doppelverhältnisses zurück. Man erhält daher für das Doppelverhältnis $(abcd)$ *vier gleichwertige Formen*

134) . . . . $(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba)$.

Aus der Form des Doppelverhältnisses läfst sich ferner folgern, dafs das Doppelverhältnis eines Punktwurfes von den Massen seiner Punkte unabhängig ist.

Denn sind a', b', . . die mit den Punkten a, b, . . kongruenten *einfachen* Punkte und ist $a = \mathfrak{a}a'$, $b = \mathfrak{b}b'$, . . , wo also $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, . . die Massen der Punkte a, b, . . bezeichnen, so wird das obige Doppelverhältnis nach den Gleichungen 18)

$$\frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} \frac{[a'c']}{[c'b']} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\mathfrak{b}} \frac{[a'd']}{[d'b']}$$

oder, da sich alle Massenfaktoren fortheben,

135) . . . . $$\frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = \frac{[a'c']}{[c'b']} : \frac{[a'd']}{[d'b']}.$$

Das Doppelverhältnis eines Punktwurfes verhält sich also wirklich invariant gegenüber einer Massenänderung seiner Punkte.

Die Gleichung 135) hat nun aber noch ein besonderes Interesse, weil ihre rechte Seite eine einfache *geometrische Deutung* zuläfst. Denn da a', b', . . einfache Punkte sind, so sind die Verhältnisse

der Stäbe $[a'c']$ und $[c'b']$ und andererseits der Stäbe $[a'd']$ und $[d'b']$

zugleich die Verhältnisse

der Abstände von a' nach c' und c' nach b' und von a' nach d' und d' nach b',

vorausgesetzt, dafs eine Verschiedenheit im *Sinne* dieser Abstände durch entgegengesetzte *Vorzeichen* zum Ausdruck gebracht wird (vgl. Fig. 35). Man hat also den Satz:

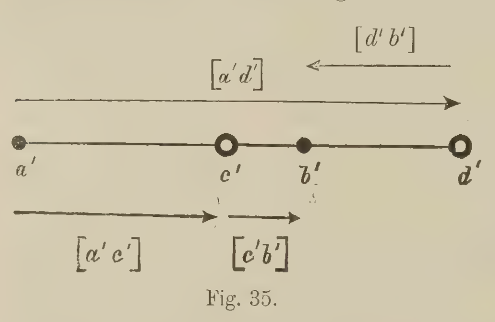


Fig. 35.

Das Doppelverhältnis des Punktwurfes a, b, c, d ist gleich dem Quotienten aus den beiden Abstandsverhältnissen der Punkte c und d von den Punkten a und b.

Da die Punkte c und d mit a und b in einer Geraden liegen, so werden sie sich als Vielfachensummen von a und b ausdrücken lassen. Und da es bei der Betrachtung des Doppelverhältnisses der vier Punkte a, b, c, d auf die Massen der Punkte c und d nicht ankommt, so wird man die beiden Punkte sogar durch Gleichungen von der *besonderen* Form

136) . . . . $c = a + \mathfrak{g}b$ und $d = a + \mathfrak{h}b$

darstellen können, in denen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Zahlgröfsen sind. Das Doppelverhältnis des Punktwurfes a, b, c, d läfst sich dann durch diese beiden Zahlgröfsen ausdrücken. Es wird

137) . . . . $$\frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = \frac{\mathfrak{g}[ab]}{[ab]} : \frac{\mathfrak{h}[ab]}{[ab]} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}.$$

Ist insbesondere $\mathfrak{h} = -\mathfrak{g}$, besitzen also die Ausdrücke für die vier Punkte des Wurfes die Form a, b, $a + \mathfrak{g}b$, $a - \mathfrak{g}b$, so wird ihr Doppelverhältnis $= -1$, und der Punktwurf heifst harmonisch.

Denkt man sich drei von den Punkten eines Punktwurfes, etwa die Punkte a, b, c, fest und den vierten d beweglich, so dafs dieser die ganze Punktreihe der Geraden $[ab]$ durchlaufen kann, so verfügt man am besten über die Massen der beiden ersten Punkte in der Weise, dafs der dritte Punkt c der „Einheitspunkt" der Punktreihe, d. h. gerade die Summe von a und b wird, dafs also

138) . . . . $c = a + b$

wird Durch diese Forderung sind die Massen der beiden „Grundpunkte" a und b bis auf einen willkürlich bleibenden Proportionalitätsfaktor vollkommen bestimmt. Der veränderliche Punkt d der Punktreihe läfst sich dann, da es nur auf seine Lage, nicht auf seine Masse ankommt, wieder in der Form

139) . . . . $d = a + \mathfrak{k}b$

darstellen, unter $\mathfrak{k}$ eine Zahlgröfse verstanden. Dieser Zahlfaktor $\mathfrak{k}$ möge der Parameter des Punktes d in Bezug auf die drei Punkte a, b, c genannt werden. Er ist nämlich

erstens durch die Lage des Punktes d aus eindeutig bestimmt, sobald man über das Massenverhältnis der Grundpunkte a und b mit Rücksicht auf die Lage des Einheitspunktes c verfügt hat,

zweitens aber ist auch umgekehrt der Ort des Punktes d durch Angabe seines Parameters $\mathfrak{k}$ vollkommen festgelegt, sobald die Punkte a, b, c ihrer Lage nach gegeben sind.

Das Doppelverhältnis des Punktwurfes a, b, c, d drückt sich in sehr einfacher Weise durch den Parameter des Punktes d aus; denn aus der Gleichung 137) folgt, dafs das Doppelverhältnis

140) . . . . $(abcd) = \frac{1}{\mathfrak{k}}$

d. h. gleich dem reciproken Werte des Parameters von d ist.

Eine Schar von vier Stäben A, B, C, D, die durch einen und denselben Punkt gehen, und deren Reihenfolge in bestimmter Weise unabhängig von ihrer Lage festgesetzt ist, möge ein Stabwurf genannt werden (vergl. Fig. 36). Die beiden ersten Stäbe A und B und die beiden letzten Stäbe C und D sollen zugeordnete Stäbe heifsen.

Die planimetrischen Produkte von je zwei Stäben eines Wurfes unterscheiden sich von einander nur um einen Zahlfaktor; denn sie stellen (nach Gl. 78) sämtlich den mit einer gewissen Masse belasteten Schnittpunkt der vier Stäbe dar. Sie tragen also den Charakter von gleich benannten Zahlen. Der aus ihnen gebildete Doppelbruch

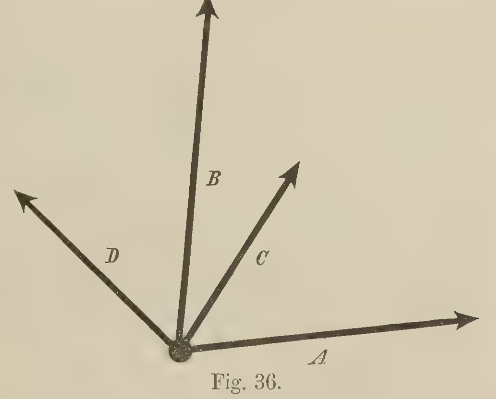


Fig. 36.

141) . $(ABCD) = \frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]}$

ist daher wieder eine unbenannte Zahl und wird das Doppelverhältnis des Stabwurfes genannt.

Die Eigenschaften dieses Doppelverhältnisses entsprechen genau denen des Doppelverhältnisses eines Punktwurfes. In der That ändert sich der Wert des Doppelverhältnisses nicht

erstens, wenn man gleichzeitig die Stäbe eines jeden Paares zugeordneter Stäbe unter sich vertauscht,

zweitens, wenn man die beiden Paare zugeordneter Stäbe mit einander vertauscht, was mit Rücksicht auf Gl. 88) ebenso wie bei einem Punktwurf bewiesen werden kann. Man erhält also wieder die Gleichung

$$142) \quad \ldots \quad (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Aufserdem aber läfst sich auch zeigen, dafs das Doppelverhältnis eines Stabwurfes von der Länge seiner Stäbe unabhängig ist. Denn bezeichnet man wieder mit A', B', . . Stäbe von der Länge 1, die den Geraden der Stäbe A, B, . . angehören, und deren Sinn noch beliebig gewählt werden darf, und setzt

$$A = \mathfrak{a}A', \; B = \mathfrak{b}B', \ldots,$$

so stellen die Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, . . die Längen der Stäbe A, B, . . dar, versehen mit dem Plus- oder Minuszeichen, je nachdem der Sinn der „einfachen" Stäbe A', B', . . mit dem Sinn der Stäbe A, B, . . übereinstimmt oder nicht. Dann wird (nach den Gleichungen 90) wieder wie oben bei dem Doppelverhältnis eines Punktwurfes

$$(ABCD) = \frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} \frac{[A'C']}{[C'B']} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\mathfrak{b}} \frac{[A'D']}{[D'B']},$$

d. h. da sich sämtliche Zahlfaktoren wegheben.

$$143) \quad . \; . \quad (ABCD) = \frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]} = \frac{[A'C']}{[C'B']} : \frac{[A'D']}{[D'B']} = (A'B'C'D').$$

Das Doppelverhältnis eines Stabwurfes verhält sich daher in der That invariant gegenüber einer Längenänderung seiner Stäbe.

Es ist mithin auch erlaubt, statt von dem Doppelverhältnis der vier Stäbe A, B, C, D *von dem Doppelverhältnis der vier Strahlen* A, B, C, D zu sprechen.

Die Gleichung 143) ermöglicht nun aber auch eine *geometrische Deutung* des Doppelverhältnisses von vier Strahlen. Stellt man nämlich die einfachen Stäbe A', B', . . der Gleichung 143) als Produkte von je zwei *einfachen* Punkten dar, von denen der eine jedes Mal der Schnittpunkt s der vier Strahlen ist, setzt also $A' = [sa]$, $B' = [sb]$, . . (vgl. Fig. 37), so liegen die Punkte a, b, . . auf einem mit dem Radius 1 um s geschlagenen Kreise, und die Gleichung 143) für das Doppelverhältnis des Strahlwurfes verwandelt sich in

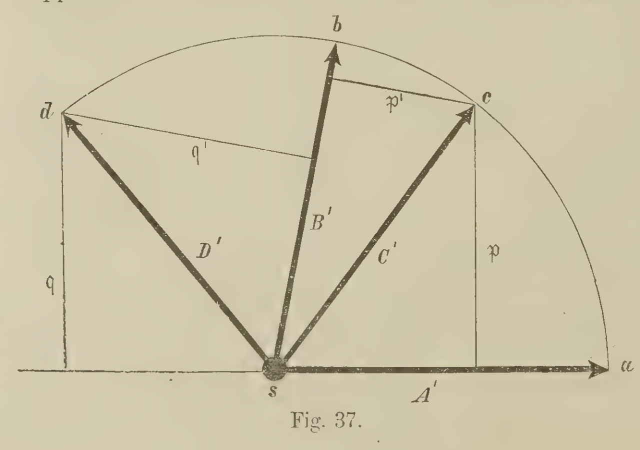


Fig. 37.

$$(ABCD) = \frac{[sa \cdot sc]}{[sc \cdot sb]} : \frac{[sa \cdot sd]}{[sd \cdot sb]},$$

wofür man nach 78) auch setzen kann

$$(ABCD) = \frac{[sac]s}{[scb]s} : \frac{[sad]s}{[sdb]s},$$

oder endlich

$$(ABCD) = \frac{[sac]}{[scb]} : \frac{[sad]}{[sdb]}.$$

Hier sind dann die Produkte $[sac]$, $[scb]$, $[sad]$, $[sdb]$ *die Flächenzahlen* der durch die drei Faktoren eines jeden Produktes bestimmten *Rhomben;* und da die Seiten dieser Rhomben die Länge 1 haben, so stimmen jene Flächenzahlen überein mit den *Längenzahlen der Rhombenhöhen,* vorausgesetzt, dafs man diesen Längenzahlen das Plus- oder Minuszeichen giebt, je nachdem der Sinn des zugehörigen Rhombus mit dem Sinne des Einheitsblattes übereinstimmt oder nicht (vgl. Gl. 71).

Setzt man daher noch die in diesem Sinne bezeichneten Längenzahlen der Rhombenhöhen, d. h. der Abstände der Punkte c und d von den Stäben A, B gleich $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, so erhält man für das Doppelverhältnis des Strahlwurfes die Darstellung

$$144) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (ABCD) = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'} : \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}'}.$$

Und beachtet man endlich noch, dafs für alle Punkte eines Strahles C, der durch den Schnittpunkt zweier anderen Strahlen A und B hindurchgeht, das Verhältnis der Abstände von den Strahlen A und B *denselben Wert* besitzt, so kann man das Abstandsverhältnis $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}$ des *Punktes* c von den Strahlen A und B auch als das Abstandsverhältnis des *Strahles* C von den Strahlen A und B bezeichnen und erhält somit den Satz:

D a s D o p p e l v e r h ä l t n i s d e s S t r a h l w u r f e s A, B, C, D i s t g l e i c h d e m Q u o t i e n t e n a u s d e n b e i d e n A b s t a n d s v e r h ä l t n i s s e n d e r S t r a h l e n C u n d D v o n d e n S t r a h l e n A u n d B.

Da die Stäbe C und D durch die Schnittpunkte von A und B hindurchgehen, so lassen sie sich als Vielfachensummen von A und B darstellen, und da es nicht sowohl auf die Länge und den Sinn der Stäbe C und D, als auf ihre Lage ankommt, sogar durch Gleichungen von der besonderen Form

$$145) \quad \ldots\ldots\ldots \quad C = A + \mathfrak{g}B, \quad D = A + \mathfrak{h}B,$$

in denen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Zahlgröfsen sind. Das Doppelverhältnis des Strahlwurfes A, B, C, D läfst sich dann genau wie oben das Doppelverhältnis des Punktwurfes durch diese beiden Zahlgröfsen ausdrücken; denn es wird

$$146) \quad \ldots\ldots \quad \frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]} = \frac{\mathfrak{g}[AB]}{[AB]} : \frac{\mathfrak{h}[AB]}{[AB]} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}.$$

Der Strahlwurf heifst wieder h a r m o n i s c h, wenn sein Doppelverhältnis den Wert -1 hat, wenn somit $\mathfrak{h} = -\mathfrak{g}$ ist. Dann besitzen also die Ausdrücke für die vier Stäbe die Form

$$A, \; B, \; A + \mathfrak{g}B, \; A - \mathfrak{g}B.$$

Man denke sich jetzt wieder drei von den Strahlen eines Strahlwurfes, etwa die Strahlen A, B, C fest, während man den vierten Strahl D beweglich läfst, so dafs er das ganze Strahlbüschel mit dem Scheitel $[AB]$ durchlaufen kann. Dann kann man über die Längen der beiden ersten Stäbe in der Weise verfügen, dafs der dritte Stab C der Einheitsstab des Strahlbüschels, d. h. gerade die Summe der „Grundstäbe" A und B wird, also

$$147) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C = A + B$$

wird (vgl. Fig. 38). Der veränderliche Stab D ferner läfst sich, da es auf seine Länge und seinen Sinn nicht ankommt, wieder in der Form

$$148) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad D = A + \mathfrak{k}B$$

darstellen. Hier ist die Zahlgröfse $\mathfrak{k}$ dem Strahle D eindeutig zugeordnet, sobald die Strahlen A, B, C ihrer Lage nach gegeben sind, und möge daher der Parameter des Strahles D in Bezug auf die drei Strahlen A, B, C heifsen.

Das Doppelverhältnis des Strahlwurfes A, B, C, D wird wieder (nach 146)

149) . . . . $(ABCD) = \frac{1}{\mathfrak{k}}$,

d. h. gleich dem reciproken Wert des Parameters von D.

Damit hat man für die beiden „Elementargebilde" der projektiven Geometrie, die Punktreihe und das Strahlbüschel, zwei zu einander durchaus dualistische Darstellungen gefunden und zugleich in dem Parameter $\mathfrak{k}$ ein Mittel für die Zuordnung *zweier* solcher Elementargebilde gewonnen.

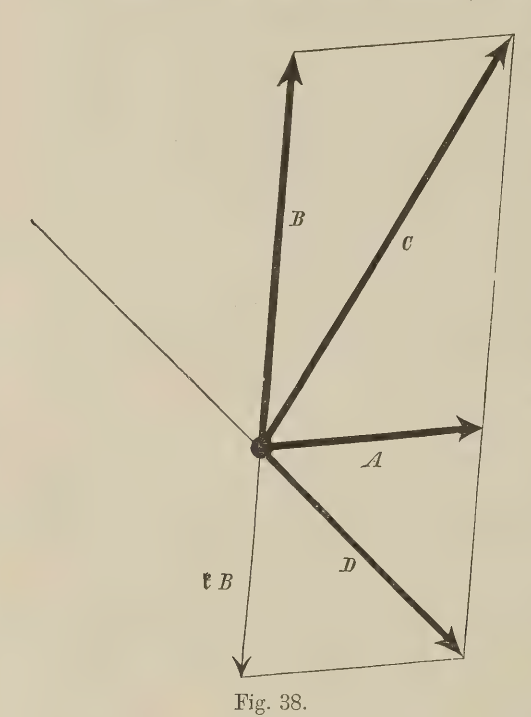


Fig. 38.

Man kann nämlich die Elemente zweier Elementargebilde, d. h. also die Elemente zweier Punktreihen oder zweier Strahlbüschel oder einer Punktreihe und eines Strahlbüschels in solcher Weise einander zuordnen, dafs man den beiden Grundelementen und dem Einheitselemente des einen Gebildes die beiden Grundelemente und das Einheitselement des andern Gebildes zuweist, aufserdem aber einem jeden beliebigen Elemente des einen Gebildes dasjenige Element des andern, das denselben Parameter besitzt. Man sagt dann, die beiden Elementargebilde seien projektiv auf einander bezogen.

Um die projektive Zuordnung zweier Elementargebilde festzulegen, *kann man drei der Lage nach beliebig gewählten Elementen des einen Gebildes drei ebenfalls der Lage nach beliebig gewählte Elemente des andern zuweisen.* Dadurch ist dann aber zu jedem vierten Elemente des ersten Gebildes das entsprechende Element des andern eindeutig bestimmt. Denn man braucht nur in den beiden Elementargebilden die Massen oder Längen der beiden ersten Elemente so zu wählen, dafs das dritte Element das Einheitselement des Gebildes wird, so ist die gewünschte Zuordnung geleistet.

Der Ausdruck „projektive Zuordnung" erklärt sich durch folgende Sätze:

1. Projiciert man eine Punktreihe von einem aufserhalb ihrer Geraden gelegenen Punkte s aus, so erhält man ein zu der Punktreihe projektives Strahlbüschel.

In der That, bezeichnet man die Grundpunkte der Punktreihe mit a und b und ihre „Scheine" $[sa]$ und $[sb]$ mit A und B, setzt also $[sa] = A$ und $[sb] = B$ (vgl. Fig. 39), so wird der Schein des Einheitspunktes $a + b$ der Punktreihe gleich

$$[s(a + b)] = [sa] + [sb] = A + B,$$

d. h. auch der Schein des Einheitspunktes $a+b$ der Punktreihe a, b stellt sich gerade als Summe der aus den Grundpunkten a und b durch die Projektion hervorgehenden Grundstäbe A und B dar. Ebenso wird der Schein des veränderlichen Punktes $a+\mathfrak{t}b$ gleich

$$[s(a+\mathfrak{t}b)] = [sa] + \mathfrak{t}[sb] = A + \mathfrak{t}B,$$

sein Parameter wird also gleich dem Parameter des projicierten Punktes $a+\mathfrak{t}b$, und es ist daher wirklich das Strahlbüschel A, B der mit ihm „perspektiven" Punktreihe a, b in dem oben angegebenen Sinne projektiv zugeordnet.

Umgekehrt gilt der Satz:

2. Schneidet man ein Strahlbüschel mit einer nicht durch seinen Scheitel gehenden Geraden G, so erhält man auf der Geraden eine zu dem Strahlbüschel projektive Punktreihe.

Denn bezeichnet man die Grundstäbe des Büschels mit A und B und setzt die Schnittpunkte der Geraden G mit diesen Stäben gleich a und b, setzt also $[GA] = a$ und $[GB] = b$ (vgl. Fig. 40), so wird der Schnittpunkt der Geraden G mit dem Einheitsstabe $A+B$ gleich

$$[G(A+B)] = [GA] + [GB] = a + b$$

und der Schnittpunkt mit dem veränderlichen Stabe $A+\mathfrak{t}B$ gleich

$$[G(A+\mathfrak{t}B)] = [GA] + \mathfrak{t}[GB] = a + \mathfrak{t}b.$$

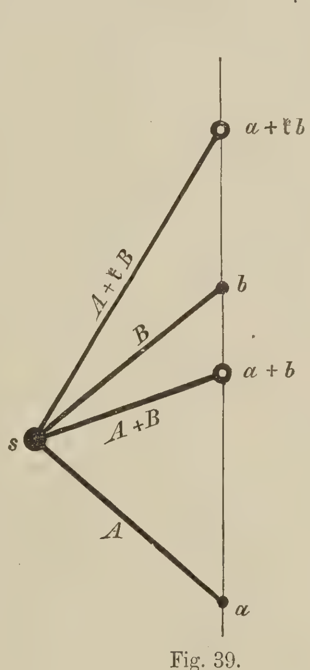
Diese beiden Gleichungen aber besagen, dafs die Punktreihe a, b zu dem mit ihr „perspektiven" Strahlbüschel A, B projektiv ist.

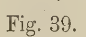
Unmittelbar aus dem Begriffe projektiver Elementargebilde folgt ferner der Satz:

3. Sind zwei Elementargebilde einem dritten projektiv, so sind sie auch unter einander projektiv.

Und hieraus wieder mit Rücksicht auf die Sätze 1. und 2.:

4. Zwei „perspektive" Punktreihen, d. h. zwei Punktreihen, welche Schnitte eines und desselben Strahlbüschels sind, sind projektiv.




Fig. 39.

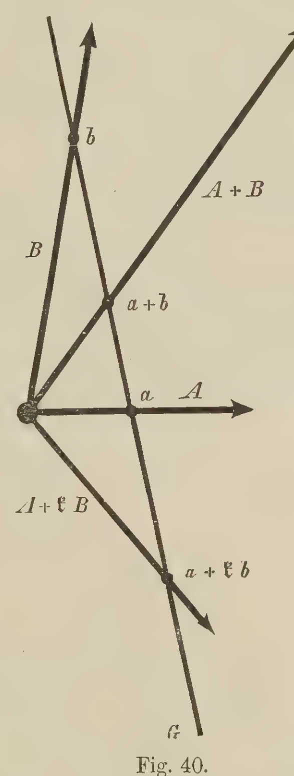


Fig. 40.

5. Zwei „perspektive" Strahlbüschel, d. h. zwei Strahlbüschel, welche Scheine einer und derselben Punktreihe sind, sind projektiv.

Andererseits lassen sich je zwei beliebig gelegene projektive Elementargebilde durch wiederholte Anwendung der Perspektive auf einander beziehen, worauf hier indes nicht näher eingegangen werden soll.

Es seien in der Ebene vier feste Punkte a, b, c, d gegeben, von denen keine drei in *einer* geraden Linie liegen. Dann frage man nach denjenigen Punkten x der Ebene, für die der Strahlwurf $[xa]$, $[xb]$, $[xc]$, $[xd]$ ein gegebenes Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$ besitzt, welche also der Gleichung genügen

$$150) \quad \frac{[xa \cdot xc]}{[xc \cdot xb]} : \frac{[xa \cdot xd]}{[xd \cdot xb]} = \mathfrak{g}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung läfst sich nach dem Vorbilde von S. 40 und 41 umformen, wodurch die Gleichung die Gestalt annimmt

$$151) \quad \frac{[xac]}{[xcb]} : \frac{[xad]}{[xdb]} = \mathfrak{g}.$$

Hierfür aber kann man auch schreiben:

$$152) \quad [xac]\,[xdb] - \mathfrak{g}[xad]\,[xcb] = 0.$$

Dieser Gleichung müssen alle Punkte x genügen, von denen aus die vier Punkte a, b, c, d durch einen Strahlwurf mit dem Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$ projiciert werden.

Da die Gleichung 152) in Bezug auf x vom zweiten Grade ist, so stellt sie eine Kurve zweiter Ordnung dar. In der That erkennt man sofort, dafs die Kurve 152) von einer jeden Geraden $[yz]$ in zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten wird. Substituiert man nämlich in die Gleichung 152) den laufenden Punkt $y + \mathfrak{k}z$ der Geraden $[yz]$, so erhält man für den Parameter $\mathfrak{k}$ eine Gleichung zweiten Grades. Bezeichnet man ihre Wurzeln mit $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$, so sind die Punkte $y + \mathfrak{k}_1 z$ und $y + \mathfrak{k}_2 z$ die Schnittpunkte der Geraden $[yz]$ mit der Kurve 152).

Aus der Form der Gleichung 152) folgt ferner sogleich, dafs die Kurve zweiter Ordnung durch die vier Punkte a, b, c, d hindurchgeht. Denn setzt man x gleich irgend einem dieser vier Punkte, oder auch gleich dem Produkte eines Zahlfaktors mit einem dieser vier Punkte, so verschwinden die beiden Glieder der linken Seite von 152) einzeln, weil in jedem Gliede sicher *eins* von seinen beiden dreifaktorigen Produkten zweigleiche Faktoren enthält.

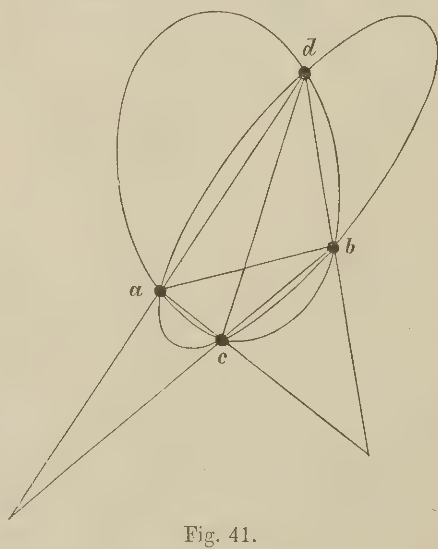


Fig. 41.

Denkt man sich das bisher als gegeben angenommene Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$ *veränderlich*, so stellt die Gleichung 152) das ganze Büschel von Kurven zweiter Ordnung dar, welche durch die vier Punkte a, b, c, d hindurchgehen (vgl. Fig. 41). Jeder von diesen Kurven kommt ein besonderer Wert des Doppelverhältnisses $\mathfrak{g}$ zu. Dieses Doppelverhältnis kann daher *das Doppelverhältnis der Kurve zweiter Ordnung in Bezug auf die vier Grundpunkte des Büschels* genannt werden. Um dies Doppelverhältnis und damit die Kurve zweiter Ordnung festzulegen, kann man die Forderung stellen, dafs die Kurve noch durch einen fünften Punkt e hindurchgehen solle. Der Parameter $\mathfrak{g}$ dieser Kurve zweiter Ordnung mufs dann der Gleichung genügen

$$153) \quad [eac]\,[edb] - \mathfrak{g}[ead]\,[ecb] = 0;$$

aus ihr aber und der Gleichung 152) folgt durch Elimination von $\mathfrak{g}$ die Gleichung

$$154) \quad \begin{vmatrix} [xac]\,[xdb] & [xad]\,[xcb] \\ [eac]\,[edb] & [ead]\,[ecb] \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung einer *Kurve zweiter Ordnung, die durch die fünf Punkte a, b, c, d, e hindurchgeht.*

Dem Kurvenbüschel 152) gehören drei zerfallende Kurven zweiter Ordnung an, die den Parameterwerten 0, ∞, 1 entsprechen. Denn für $\mathfrak{g} = 0$ nimmt die quadratische Gleichung die Form an

155) . . . . $[xac]\,[xdb] = 0,$

zerlegt sich also in die beiden linearen Gleichungen

$$[xac] = 0 \quad \text{und} \quad [xdb] = 0$$

und stellt somit das durch die beiden Stäbe $[ac]$ und $[db]$ bestimmte Linienpaar dar.

Andererseits geht die Gleichung 152) für $\mathfrak{g} = \infty$ über in die Gleichung

156) . . . . $[xad]\,[xcb] = 0;$

die Kurve zweiter Ordnung zerfällt also in das Linienpaar der Stäbe $[ad]$ und $[cb]$.

Für $\mathfrak{g} = 1$ endlich nimmt die quadratische Gleichung 152) die Form an

(*) . . . . $[xac]\,[xdb] - [xad]\,[xcb] = 0.$

Daſs auch diese Gleichung ein Linienpaar darstellt, erkennt man am besten mit Hülfe der Identität 129); denn nach dieser ist die linke Seite der Gleichung (*) gleich $[xab]\,[xdc]$, die Gleichung (*) verwandelt sich daher in

157) . . . . $[xab]\,[xdc] = 0$

und ist also die Gleichung des Linienpaares der Stäbe $[ab]$ und $[dc]$.

Die drei in dem Büschel enthaltenen zerfallenden Kurven zweiter Ordnung sind also nichts anderes als die drei Paare Gegenseiten des vollständigen Vierecks *abcd.*

Es bedarf kaum der Erwähnung, daſs die der Gleichung 152) dualistisch entsprechende Gleichung

158) $[UAC]\,[UDB] - \mathfrak{g}\,[UAD]\,[UCB] = 0$

diejenige Schar von Kurven zweiter Klasse darstellt, welche die Geraden der Stäbe A, B, C, D zu Tangenten haben (vgl. Fig. 42).

Dieser Schar gehören dann wieder drei zerfallende Kurven zweiter Klasse an, nämlich die Punktpaare

$[AC]$, $[DB]$,
$[AD]$, $[CB]$,
$[AB]$, $[DC]$,

d. h. die drei Paare von Gegenecken des vollständigen Vierseits der Stäbe A, B, C, D. Ferner erhält man genau wie oben bei der Kurve zweiter Ordnung für eine *Kurve zweiter Klasse, welche die Geraden der fünf Stäbe A, B, C, D, E zu Tangenten hat*, die Gleichung

159) . . . . . . $\begin{vmatrix} [UAC]\,[UDB] & [UAD]\,[UCB] \\ [EAC]\,[EDB] & [EAD]\,[ECB] \end{vmatrix} = 0.$

[AD] [DB] [AC] [DC] [CB] [AB] A B C D

Fig. 42.

Sechster Abschnitt.

Das Fundamentaldreieck. Die Dreieckskoordinaten eines Punktes und eines Stabes.

Wir benutzen als „Grundpunkte", aus denen alle Punkte der Ebene numerisch abgeleitet werden sollen, drei nicht in gerader Linie liegende vielfache Punkte e_1, e_2, e_3, deren Massen mit $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ bezeichnet sein mögen und nennen das durch sie bestimmte Dreieck das Fundamentaldreieck. Sind dann a_1, a_2, a_3 die mit den drei Punkten e_1, e_2, e_3 zusammenfallenden *einfachen* Punkte, so bestehen die Gleichungen

160) . . . . . . $e_1 = \mathfrak{m}_1 a_1, \quad e_2 = \mathfrak{m}_2 a_2, \quad e_3 = \mathfrak{m}_3 a_3.$

Dabei soll die *Lage* der drei Grundpunkte ganz beliebig angenommen werden; über ihre *Massen* aber wollen wir in der Weise verfügen, dafs ein der Lage nach beliebig gewählter vierter Punkt e, der aber nicht mit zwei Grundpunkten in derselben geraden Linie liegt, *sich gerade als Summe der drei Grundpunkte darstellt*, d. h. die Ableitzahlen 1, 1, 1 erhält*) (vgl. Fig. 43). Dieser Punkt möge der Einheitspunkt der Ebene heifsen. Für ihn wird also

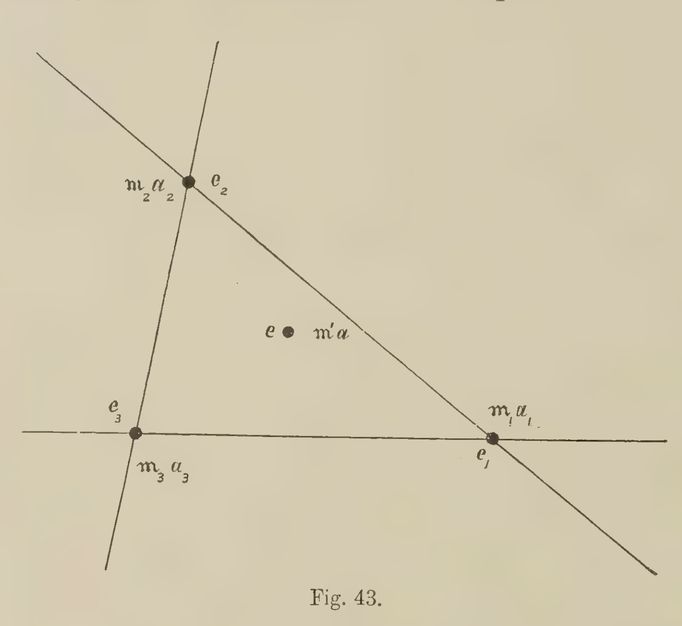


Fig. 43.

161) $e = e_1 + e_2 + e_3$

oder wegen 160)

162) $e = \mathfrak{m}_1 a_1 + \mathfrak{m}_2 a_2 + \mathfrak{m}_3 a_3.$

Bezeichnet man ferner noch die Masse des Einheitspunktes mit $\mathfrak{m}'$ und den mit ihm kongruenten *einfachen* Punkt mit a, so wird aufserdem

163) . . $e = \mathfrak{m}' a,$

und die Gleichung 162) verwandelt sich in

164) $\mathfrak{m}' a = \mathfrak{m}_1 a_1 + \mathfrak{m}_2 a_2 + \mathfrak{m}_3 a_3,$

woraus (nach S. 3) für die Masse $\mathfrak{m}'$ des Einheitspunktes der Wert folgt

165) $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3.$

Um die Massen der drei Grundpunkte entsprechend der Gleichung 164) zu bestimmen, multipliziere man diese Gleichung der Reihe nach mit den Produkten $[a_2 a_3]$, $[a_3 a_1]$, $[a_1 a_2]$, so erhält man die Gleichungen

166) $\mathfrak{m}'[a a_2 a_3] = \mathfrak{m}_1 [a_1 a_2 a_3], \quad \mathfrak{m}'[a a_3 a_1] = \mathfrak{m}_2 [a_1 a_2 a_3], \quad \mathfrak{m}'[a a_1 a_2] = \mathfrak{m}_3 [a_1 a_2 a_3],$

aus denen für die drei gesuchten Massen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ die Werte folgen

167) . . . . $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}' \frac{[a a_2 a_3]}{[a_1 a_2 a_3]}, \quad \mathfrak{m}_2 = \frac{[a a_3 a_1]}{[a_1 a_2 a_3]}, \quad \mathfrak{m}_3 = \frac{[a a_1 a_2]}{[a_1 a_2 a_3]}.$

Durch diese Gleichungen sind die Massen der drei Grundpunkte bis auf einen Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{m}'$, der die Masse des Einheitspunktes darstellt, eindeutig bestimmt.

Will man endlich noch die Willkürlichkeit dieses Proportionalitätsfaktors aufheben, so unterwerfe man noch die drei vielfachen Punkte e_1, e_2, e_3 der Bedingung, *dafs ihr äufseres Produkt* $= 1$ *sein solle*, dafs also

*) Vgl. Möbius, Der barycentrische Calcul, § 235 ff. Gesammelte Werke, Bd. I.

168) . . . . $[e_1 e_2 e_3] = 1$

sei. Diese Bedingung läfst sich wegen 160) auch in der Form schreiben

169) . . . . $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 [a_1 a_2 a_3] = 1;$

und setzt man in diese Gleichung für $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ ihre Werte aus 167) ein, so erhält man für den Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{m}'$, d. h. für die Masse des Einheitspunktes, die Darstellung

170) . . . . $\mathfrak{m}' = \sqrt[3]{\frac{[a_1 a_2 a_3]^2}{[a a_2 a_3]\,[a a_3 a_1]\,[a a_1 a_2]}}.$

Aus den Formeln 167) und 170) folgert man dann:

Ist das Produkt $[a_1 a_2 a_3]$ *positiv,* stimmt also der Sinn des Blattes $[a_1 a_2 a_3]$ mit dem Sinne des Einheitsblattes überein (vgl. S. 20) und liegt zuerst der Einheitspunkt a innerhalb des Fundamentaldreiecks, so sind die drei Nennerprodukte von 170) positiv, also ist auch $\mathfrak{m}'$ positiv, und es sind somit nach 167) auch alle drei Massen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ positiv. Liegt ferner der Einheitspunkt e in einem von den drei „Vierecksräumen“ *), in die man

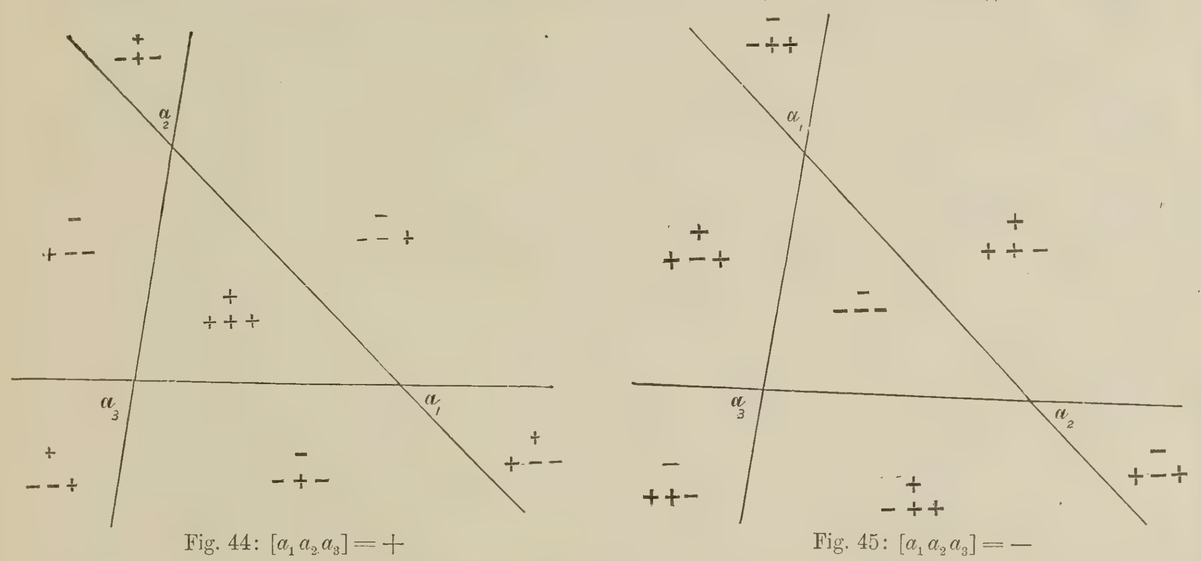


Fig. 44: $[a_1 a_2 a_3] = +$ Fig. 45: $[a_1 a_2 a_3] = -$

gelangt, wenn man vom Innern des Fundamentaldreiecks ausgehend eine Seite des Dreiecks überschreitet, etwa in dem an der Seite $a_2 a_3$ liegenden Vierecksraum, so ist von den drei Nennerprodukten in 170) das dieser Seite entsprechende Produkt $[a a_2 a_3]$ negativ, während die beiden andern Produkte positiv bleiben. Es wird daher auch $\mathfrak{m}'$ negativ, und somit nach 167) $\mathfrak{m}_1$ positiv, $\mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{m}_3$ negativ.

Liegt endlich e in einem der drei „Dreiecksräume“, welche von den Scheitelräumen des Fundamentaldreiecks gebildet werden, etwa in dem Raume, in den man gelangt, wenn man von dem Innern des Dreiecks ausgehend die Ecke a_1 überschreitet, so sind von den drei Nennerprodukten in 170) die beiden Produkte, welche diese Ecke enthalten, nämlich die Produkte $[a a_3 a_1]$ und $[a a_1 a_2]$ negativ; das andere Produkt hingegen bleibt positiv. Die Masse $\mathfrak{m}'$ des Einheitspunktes ist dann also positiv, und es wird nach 167) ebenso wie in dem gegenüberliegenden Vierecksraume $\mathfrak{m}_1$ positiv, $\mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{m}_3$ negativ (vgl. Fig. 44).

*) Man kann nämlich die unendlich ferne Gerade als die vierte Seite eines solchen Raumes auffassen.

Ist das Produkt $[a_1 a_2 a_3]$ *negativ*, weicht also der Sinn des Blattes $[a_1 a_2 a_3]$ von dem Sinne des Einheitsblattes ab, so sind sämtliche Vorzeichen umgekehrt (vgl. Fig. 45).

In den beiden Figuren 44 und 45 sind für die beiden Hauptfälle

$$[a_1 a_2 a_3] = + \quad \text{und} \quad [a_1 a_2 a_3] = -$$

die Vorzeichen der vier Gröfsen

$$\mathfrak{m}',$$
$$\mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{m}_2,\ \mathfrak{m}_3$$

in die sieben Räume eingetragen, in denen der Einheitspunkt liegen kann.

Um die analytische Bedeutung der Gleichung 168) deutlicher hervortreten zu lassen, setze man noch

$$[e_2 e_3] = E_1,\ [e_3 e_1] = E_2,\ [e_1 e_2] = E_3.$$

Dann zeigt sich zwischen den Gröfsen e_i und E_i eine *vollkommene Dualität*. Zunächst wird wegen 170)

172) . . . . $[e_i E_i] = [E_i e_i] = 1,$

andererseits wird wegen 54)

173) . . . . $[e_i E_k] = [E_k e_i] = 0 \ (i \gtrless k).$

Ferner folgen aus 91) und 168) die den Formeln 171) dualistisch entsprechenden Formeln; denn es wird z. B.

$$[E_2 E_3] = [e_3 e_1 \cdot e_1 e_2] = [e_3 e_1 e_2]\, e_1 = [e_1 e_2 e_3]\, e_1 = e_1.$$

Man erhält also wirklich die Formeln

174) . . . . $[E_2 E_3] = e_1,\ [E_3 E_1] = e_2,\ [E_1 E_2] = e_3.$

Das Produkt aller *drei* Gröfsen E_i endlich wird

$$[E_1 E_2 E_3] = [e_3 E_3] \quad \text{(nach 174)}$$
$$= 1 \quad \text{(nach 172)},$$

d. h. es gilt auch die der Gleichung 168) dualistisch entsprechende Formel

175) $[E_1 E_2 E_3] = 1.$

Weiter setze man noch

176) $\begin{cases} [a_2 a_3] = S_1, \\ [a_3 a_1] = S_2, \\ [a_1 a_2] = S_3; \end{cases}$

hier sind dann die Gröfsen S_1, S_2, S_3 drei Stäbe, die nicht nur den *Linien* des Fundamentaldreiecks angehören, sondern auch ihrer *Länge* nach mit den Seiten des Dreiecks übereinstimmen (vgl. Fig. 46). Ferner wird

177) $\begin{cases} E_1 = \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 S_1, \\ E_2 = \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 S_2, \\ E_3 = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 S_3. \end{cases}$

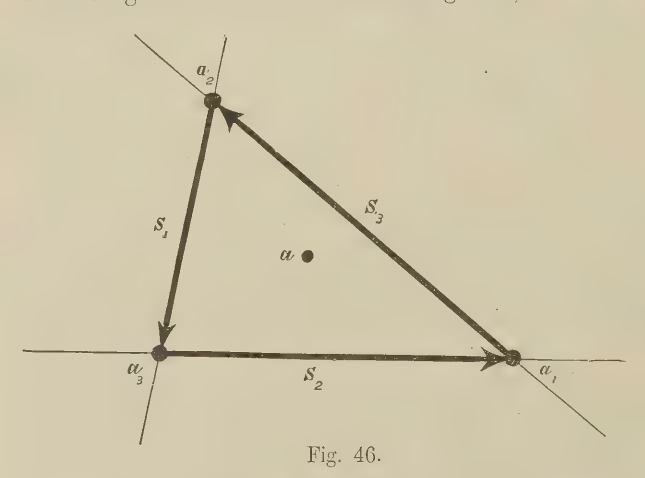


Fig. 46.

Hieraus folgt: Die drei Stäbe E_1, E_2, E_3 gehören zwar auch den Linien des Fundamentaldreiecks an, aber ihre Längen sind von den Längen der Seiten des Dreiecks im allgemeinen verschieden.

Ist jetzt x ein beliebiger einfacher oder vielfacher Punkt der Ebene, so nennt man diejenigen drei Zahlgröfsen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, durch die sich der Punkt x aus den drei Grundpunkten e_1, e_2, e_3 numerisch ableiten läfst, welche also durch die Gleichung

178) . . . . $x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$

definiert sind, die Dreieckskoordinaten des Punktes x.

Setzt man ferner die Masse des Punktes x gleich $\mathfrak{m}$ und den mit x zusammenfallenden *einfachen* Punkt gleich t, so wird

179) . . . . $x = \mathfrak{m} t$

und die Erklärungsgleichung 178) der Dreieckskoordinaten läfst sich, wenn man zugleich noch die Gleichungen 160) berücksichtigt, in der Form schreiben:

180) . . . . . . $x = \mathfrak{m} t = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{m}_1 \cdot a_1 + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{m}_2 \cdot a_2 + \mathfrak{x}_3 \mathfrak{m}_3 \cdot a_3$,

aus der sich für die Masse $\mathfrak{m}$ des Punktes x der Wert ergiebt

181) . . . . $\mathfrak{m} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{x}_3 \mathfrak{m}_3$.

Aus der Gleichung 180) kann man folgern:

Die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ des Punktes x sind diejenigen drei Zahlgröfsen, mit denen man die Massen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ der drei Grundpunkte multiplizieren mufs, damit die mit den so hervorgehenden Produkten belasteten Grundpunkte den Punkt x zum Schwerpunkte haben.

Man kann aber die Dreieckskoordinanten des Punktes x auch noch anders deuten. Multipliziert man nämlich die Gleichung 178) der Reihe nach mit E_1, E_2, E_3, so erhält man

182) $\begin{cases} [xE_1] = \mathfrak{x}_1, \\ [xE_2] = \mathfrak{x}_2, \\ [xE_3] = \mathfrak{x}_3 \end{cases}$

oder mit Rücksicht auf 177) und 179)

183) $\begin{cases} \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m} [tS_1], \\ \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m} [tS_2], \\ \mathfrak{x}_3 = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m} [tS_3]. \end{cases}$

Hier sind aber die Produkte $[tS_1]$, $[tS_2]$, $[tS_3]$ die Flächeninhalte der Parallelogramme, die durch den Punkt x und je eine Seite des Fundamentaldreiecks bestimmt werden.

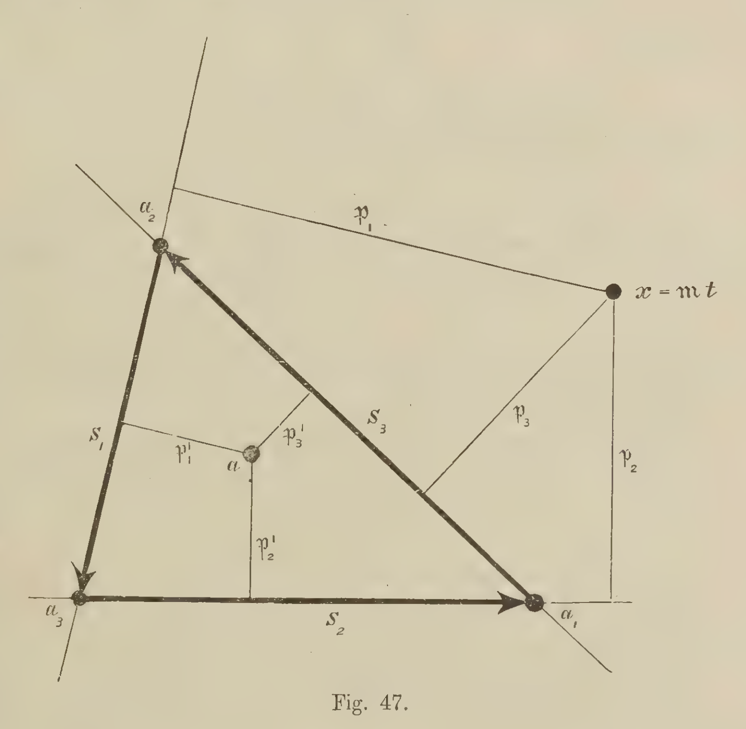


Fig. 47.

Bezeichnet man also noch die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks mit $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, und zwar diese Gröfsen positiv oder negativ genommen, je nachdem die Produkte $[aS_1]$, $[aS_2]$, $[aS_3]$ positiv oder negativ sind, und versteht man ferner unter $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ die Abstände des Punktes x von den Seiten des Fundamentaldreiecks, diese Abstände positiv oder negativ genommen, je nachdem x

auf derselben oder der entgegengesetzten Seite von S_1, S_2, S_3 liegt wie der Einheitspunkt a (vgl. Fig. 47), so wird

$$[tS_1] = \mathfrak{s}_1 \mathfrak{p}_1, \quad [tS_2] = \mathfrak{s}_2 \mathfrak{p}_2, \quad [tS_3] = \mathfrak{s}_3 \mathfrak{p}_3,$$

und die Gleichungen 183) verwandeln sich in

184) . . . $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}\, \mathfrak{s}_1 \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}\, \mathfrak{s}_2 \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{x}_3 = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}\, \mathfrak{s}_3 \mathfrak{p}_3.$

Setzt man endlich noch die absolut genommenen Abstände des Einheitspunktes $e = \mathfrak{m}' a$ von den Seiten des Fundamentaldreiecks gleich $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$, $\mathfrak{p}_3'$ und wendet die Gleichungen 184) auf den Einheitspunkt e an, dessen Koordinaten gleich 1, 1, 1 und dessen Masse gleich $\mathfrak{m}'$ ist, so erhält man die Gleichungen:

185) . . . $1 = \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}' \mathfrak{s}_1 \mathfrak{p}_1', \quad 1 = \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}' \mathfrak{s}_2 \mathfrak{p}_2', \quad 1 = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}' \mathfrak{s}_3 \mathfrak{p}_3'$

und dividiert man dann die Gleichungen 184) durch die Gleichungen 185), so findet man für die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ die Darstellung:

186) . . . $\mathfrak{x}_1 = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}'} \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_1'}, \qquad \mathfrak{x}_2 = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}'} \frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{p}_2'}, \qquad \mathfrak{x}_3 = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}'} \frac{\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{p}_3'},$

aus der die Proportion folgt:

187) . . . . $\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_1'} : \frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{p}_2'} : \frac{\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{p}_3'},$

und man hat den Satz:

Die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_i$ eines Punktes x sind bis auf einen Proportionalitätsfaktor $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}'}$ gleich den Verhältnissen $\frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_i'}$ aus den Abständen des Punktes x und denen des Einheitspunktes e von den Seiten S_i des Fundamentaldreiecks.*)

Schliefslich möge noch gezeigt werden, dafs die einzelnen Glieder der für den Punkt x gegebenen Vielfachensumme

178) . . . . $x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3,$

und ebenso die Summen je zweier von diesen Gliedern sich als *Zurückleitungen des Punktes* x auffassen lassen. Setzt man nämlich in die Gleichung 178) für $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ ihre Werte aus 182) ein, so ergiebt sich für x die Darstellung

188) . . . . $x = [xE_1]e_1 + [xE_2]e_2 + [xE_3]e_3.$

Aus der Form der Glieder der rechten Seite folgt aber mit Rücksicht auf 172) ohne weiteres, dafs sie die Zurückleitungen von x auf die Ecken des Fundamentaldreiecks unter Ausschlufs der Gegenseiten sind.

In der That, bezeichnet man diese Zurückleitungen mit z_1, z_2, z_3, so wird (nach Gleichung 119)

$$z_1 = \frac{e_1[xE_1]}{[e_1 E_1]}, \quad z_2 = \frac{e_2[xE_2]}{[e_2 E_2]}, \quad z_3 = \frac{e_3[xE_3]}{[e_3 E_3]},$$

d. h. wegen 172) wirklich

189) . . . . $z_1 = e_1[xE_1], \quad z_2 = e_2[xE_2], \quad z_3 = e_3[xE_3]$

oder also wegen 182)

190) . . . . $z_1 = \mathfrak{x}_1 e_1, \qquad z_2 = \mathfrak{x}_2 e_2, \qquad z_3 = \mathfrak{x}_3 e_3,$

womit bewiesen ist:

*) Vgl. hierzu und zum Folgenden Gundelfinger, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Dingeldey, Leipzig 1895 S. 2 ff.

Die einzelnen Glieder der Vielfachensumme 178) für den Punkt x sind die Zurückleitungen von x auf die Ecken des Fundamentaldreiecks unter Ausschlufs der Gegenseiten.

Hieraus aber folgt weiter nach der Entwickelung auf S. 33 u. 34:

Die drei Summen von *je zwei* Gliedern der Vielfachensumme 178) für x sind nichts anderes als die zu z_1, z_2, z_3 *ergänzenden* Zurückleitungen von x, d. h. als die Zurückleitungen von x auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschlufs der Gegenecken.

Denn diese drei Summen geben zu den Gröfsen z_i addiert die zurückgeleitete Gröfse x.

Bezeichnet man daher noch diese Zurückleitungen des Punktes x auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschlufs der Gegenecken mit y_1, y_2, y_3, so wird

191) . . . . $y_1 = \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3, \quad y_2 = \mathfrak{x}_3 e_3 + \mathfrak{x}_1 e_1, \quad y_3 = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2$

oder mit Rücksicht auf 160)

192) $y_1 = \mathfrak{x}_2 \mathfrak{m}_2 a_2 + \mathfrak{x}_3 \mathfrak{m}_3 a_3, \quad y_2 = \mathfrak{x}_3 \mathfrak{m}_3 a_3 + \mathfrak{x}_1 \mathfrak{m}_1 a_1, \quad y_3 = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{m}_1 a_1 + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{m}_2 a_2.$

Andererseits wird nach 118) bei Weglassung der Nenner, die den Wert 1 haben,

193) . . . . . . $y_1 = [E_1 \cdot x e_1], \quad y_2 = [E_2 \cdot x e_2], \quad y_3 = [E_3 \cdot x e_3].$

Diese Gleichungen besagen (vgl. Fig. 48):

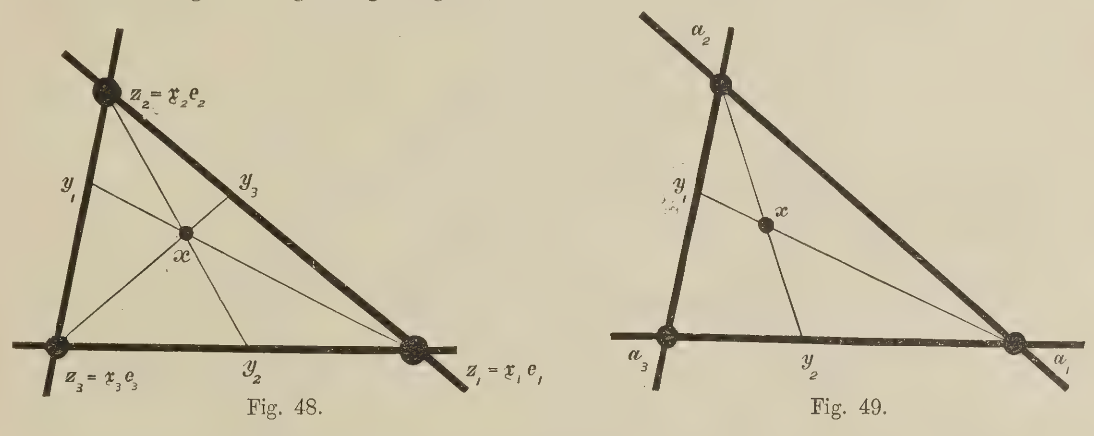


Fig. 48. Fig. 49.

Die Zurückleitungen y_i, d. h. also die drei Summen von je zwei Gliedern aus der Vielfachensumme 178) für x, sind die Schnittpunkte der Seiten des Fundamentaldreiecks mit den von den gegenüberliegenden Ecken nach dem Punkte x gezogenen Geraden, was übrigens auch aus den Gleichungen 191) zusammen mit den zur Gleichung 178) äquivalenten Gleichungen

194) . . . . $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 = y_3 + z_3$

hervorgeht.

Die Punkte y_1 kann man benutzen, wenn man den Punkt x aus seinen Koordinaten konstruieren will. Dazu zeichne man etwa die beiden Punkte y_1 und y_2, entsprechend den Gleichungen 192), indem man die Seiten $[a_2 a_3]$ und $[a_3 a_1]$ beziehlich in den Verhältnissen $\mathfrak{x}_3 \mathfrak{m}_3 : \mathfrak{x}_2 \mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{m}_1 : \mathfrak{x}_3 \mathfrak{m}_3$ teilt. Dann ist der Schnittpunkt der Geraden $[a_1 y_1]$ und $[a_2 y_2]$ der gesuchte Punkt x (vgl. Fig. 49).

Als Dreieckskoordinaten eines Stabes U bezeichnet man diejenigen drei Zahlgröfsen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$, durch die sich der Stab U aus den drei „Grundstäben E_1, E_2, E_3 numerisch ableiten läfst, die also der Gleichung genügen

$$195) \quad U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3.$$

Die so definierten Stabkoordinaten $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ gestatten zunächst leicht eine geometrische Deutung, die der zweiten Deutung der Punktkoordinaten (vgl. S. 49 u. 50) entspricht. Multipliziert man nämlich die Gleichung 195) der Reihe nach mit e_1, e_2, e_3, so erhält man

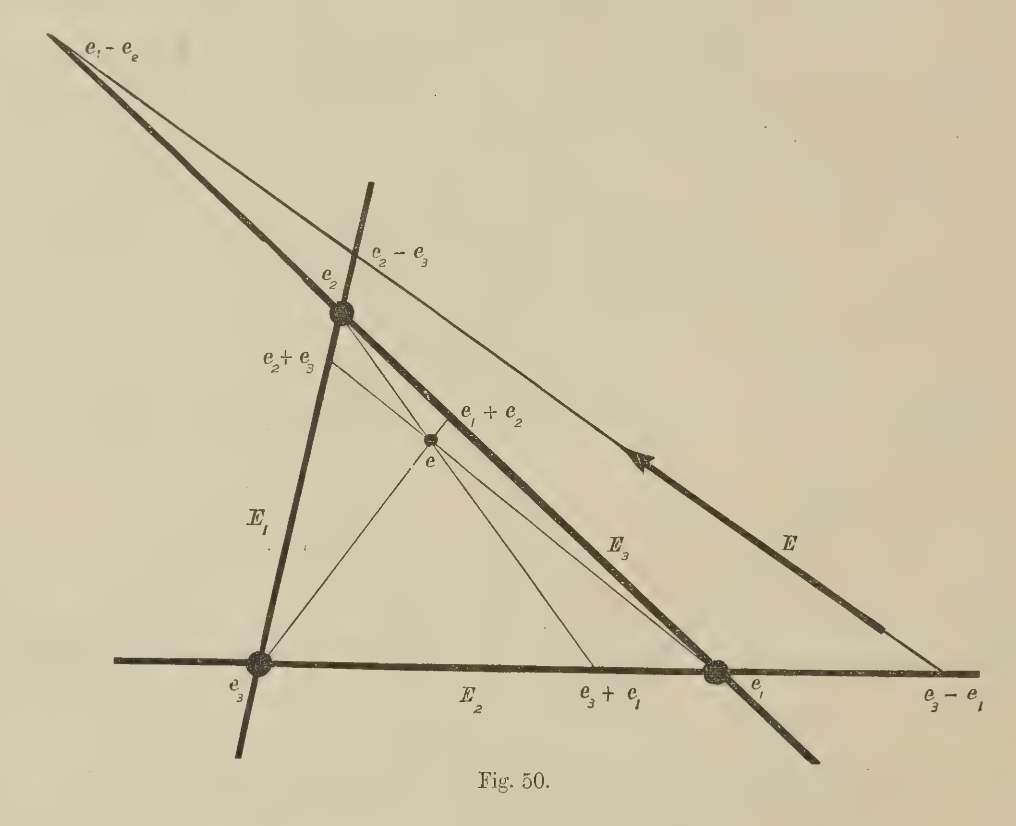


Fig. 50.

$$196) \quad [Ue_1] = \mathfrak{u}_1, \quad [Ue_2] = \mathfrak{u}_2, \quad [Ue_3] = \mathfrak{u}_3.$$

Um die linken Seiten dieser Gleichungen noch weiter umzuformen, bezeichne man noch mit T *einen Stab von der Länge* 1, welcher der Geraden des Stabes U angehört, und dessen Sinn so gewählt ist, dafs das Produkt $[Ta]$ positiv wird, und nenne den positiv oder negativ genommenen Zahlfaktor $\mathfrak{l}$, welcher der Gleichung genügt

$$197) \quad U = \mathfrak{l} T$$

die Längenzahl des Stabes U. Bei Benutzung der Gleichungen 197) und 160) lassen sich die Gleichungen 196) auch in der Form schreiben.

$$198) \quad \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{l} [Ta_1], \quad \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{m}_2 \mathfrak{l} [Ta_2], \quad \mathfrak{u}_3 = \mathfrak{m}_3 \mathfrak{l} [Ta_3]$$

Hier sind die Produkte $[Ta_1]$, $[Ta_2]$, $[Ta_3]$ nichts anderes als die Abstände $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ des Stabes U von den drei Ecken des Fundamentaldreiecks, diese Abstände positiv oder negativ genommen, je nachdem die Punkte a_1, a_2, a_3 auf derselben

Seite von T liegen wie der Einheitspunkt a oder nicht. Die Gleichungen 198) lassen sich daher auch in der Form schreiben:

$$199) \quad \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{m}_1 \, \mathfrak{l} \mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{m}_2 \, \mathfrak{l} \mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{u}_3 = \mathfrak{m}_3 \, \mathfrak{l} \mathfrak{q}_3.$$

Um aus diesen Gleichungen 199) für die Stabkoordinaten eine Proportion ableiten zu können, die der Proportion 187) für Punktkoordinaten entspricht, führe man noch den Begriff des Einheitsstabes ein. Wir bezeichnen als Einheitsstab denjenigen Stab E, dessen Koordinaten 1, 1, 1 lauten, der also durch die Gleichung bestimmt wird

$$200) \quad E = E_1 + E_2 + E_3.$$

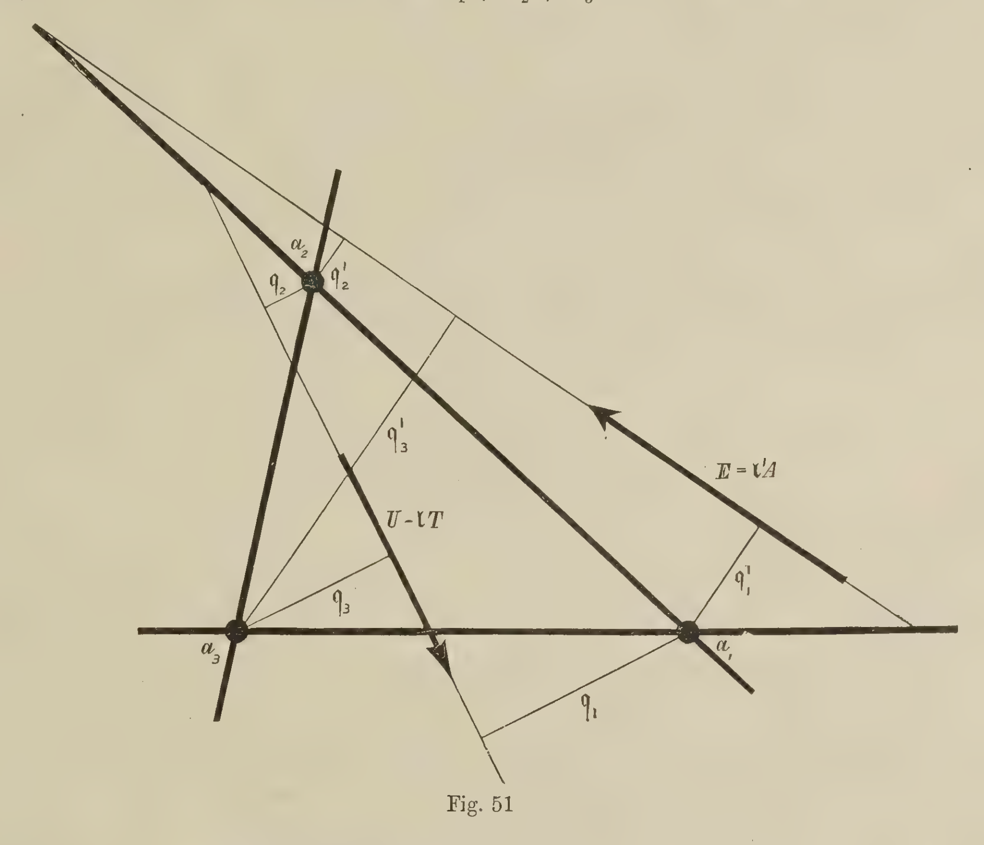


Fig. 51

Will man die *Lagenbeziehung dieses Stabes zum Einheitspunkte* finden, so frage man nach den Schnittpunkten der Geraden des Einheitsstabes mit den Seiten des Fundamentaldreiecks d. h. nach der Lage der Punkte $[EE_1]$, $[EE_2]$, $[EE_3]$ (vgl. Fig. 50). Es wird

$$\begin{aligned} [EE_1] &= [(E_1 + E_2 + E_3) E_1] \\ &= [E_2 E_1] + [E_3 E_1] \qquad \text{(nach Gl. 93)} \\ &= -e_3 + e_2 \qquad \text{(nach Gl. 88 und 174)} \\ &= e_2 - e_3. \end{aligned}$$

Die *dieser Differenz entsprechende Summe* $e_2 + e_3$ ist nun aber nach S. 51 die Zurückleitung des Punktes $e = e_1 + e_2 + e_3$ auf die Seite E_1 unter Ausschlufs der gegenüberliegenden Ecke e_1, d. h. der Schnittpunkt der Seite E_1 mit der Geraden $[ee_1]$. Und da nach S. 39 die vier Punkte e_2, e_3, $e_2 + e_3$, $e_2 - e_3$ vier harmonische Punkte sind, so hat man den Satz:

Die Gerade des Einheitsstabes trifft eine jede Seite des Fundamentaldreiecks in demjenigen Punkte der vom Einheitspunkte durch die beiden andern Seiten des Fundamentaldreiecks harmonisch getrennt ist.

Aus diesem Grunde nennt man die Gerade des Einheitsstabes die Polare des Einheitspunktes in Bezug auf das Fundamentaldreieck.

Bezeichnet man jetzt wieder mit *A den Stab von der Länge* 1, welcher der Geraden des Einheitsstabes E angehört, und dessen Sinn so gewählt ist, dafs das Produkt $[Aa]$ positiv wird, und versteht wieder unter der Längenzahl von E diejenige Zahlgröfse $\mathfrak{l}'$, die der Gleichung genügt

$$201) \quad E = \mathfrak{l}' A,$$

und setzt schliefslich (vgl. Fig. 51) die Abstände des Einheitsstabes von den Ecken des Fundamentaldreiecks gleich $\mathfrak{q}'_1$, $\mathfrak{q}'_2$, $\mathfrak{q}'_3$, wobei die Vorzeichen dieser Abstände in entsprechender Weise zu bestimmen sind wie bei den Grössen $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, so ergeben sich aus den Gleichungen 199) bei ihrer Anwendung auf die Koordinaten des Einheitsstabes die Sondergleichungen

$$202) \quad 1 = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{l}' \mathfrak{q}'_1, \qquad 1 = \mathfrak{m}_2 \mathfrak{l}' \mathfrak{q}'_2, \qquad 1 = \mathfrak{m}_3 \mathfrak{l}' \mathfrak{q}'_3;$$

und dividiert man endlich mit diesen Gleichungen in die Gleichungen 199), aus denen sie durch Specialisierung hervorgegangen sind, so erhält man für die Stabkoordinaten $\mathfrak{u}_i$ die Werte:

$$203) \quad \mathfrak{u}_1 = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{l}'}\frac{\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{q}'_1}, \qquad \mathfrak{u}_2 = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{l}'}\frac{\mathfrak{q}_2}{\mathfrak{q}'_2}, \qquad \mathfrak{u}_3 = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{l}'}\frac{\mathfrak{q}_3}{\mathfrak{q}'_3}.$$

Diese Gleichungen aber liefern die fortlaufende Proportion

$$204) \quad \mathfrak{u}_1 : \mathfrak{u}_2 : \mathfrak{u}_3 = \frac{\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{q}'_1} : \frac{\mathfrak{q}_2}{\mathfrak{q}'_2} : \frac{\mathfrak{q}_3}{\mathfrak{q}'_3}$$

und damit den Satz:

Die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{u}_i$ eines Stabes U sind bis auf den Proportionalitätsfaktor $\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{l}'}$ gleich den Verhältnissen $\frac{\mathfrak{q}_i}{\mathfrak{q}'_i}$ aus den Abständen des Stabes U und des Einheitsstabes E von den Ecken des Fundamentaldreiecks.

Man kann aber den Stabkoordinaten ebenso wie den Punktkoordinaten auch eine mehr *mechanische Deutung* geben. Um diese zu finden, zeige man zunächst auch hier wiederum, dafs die einzelnen Glieder der für den Stab U gegebenen Vielfachensumme

$$195) \quad U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3,$$

und ebenso die Summen je zweier dieser Glieder sich als Zurückleitungen des Stabes U auffassen lassen.

Dazu setze man in die Gleichung 195) für die Stabkoordinaten $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ ihre Werte aus 196) ein und erhält

$$205) \quad U = [Ue_1]E_1 + [Ue_2]E_2 + [Ue_3]E_3.$$

Aus der Form der Glieder rechter Hand folgt aber mit Rücksicht auf 172) sofort, dafs sie die Zurückleitungen des Stabes U auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschlufs der Ecken sind. Denn bezeichnet man diese Zurückleitungen mit W_1, W_2, W_3, so wird nach den Gleichungen 124) und 172) in der That

$$206) \quad W_1 = E_1[Ue_1], \; W_2 = E_2[Ue_2], \; W_3 = E_3[Ue_3],$$

oder also

$$207) \quad W_1 = \mathfrak{u}_1 E_1, \; W_2 = \mathfrak{u}_2 E_2, \; W_3 = \mathfrak{u}_3 E_3.$$

Damit ist aber wirklich bewiesen:

Die einzelnen Glieder der Vielfachensumme 195) für den Stab U sind die Zurückleitungen von U auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschlufs der Gegenecken.

Hieraus aber folgt wieder nach der Entwickelung auf S. 35:

Die drei Summen von *je zwei* Gliedern der Vielfachensumme 195) für U sind die zu W_1, W_2, W_3 ergänzenden Zurückleitungen von U, d. h. die Zurückleitungen von U auf die Ecken des Fundamentaldreiecks unter Ausschlufs der Gegenseiten.

Denn diese drei Summen geben ja zu den Gröfsen W_i addiert die zurückgeleitete Gröfse U.

Bezeichnet man daher noch diese Zurückleitungen des Stabes U auf die Ecken des Fundamentaldreiecks unter Ausschlufs der Gegenseiten mit V_1, V_2, V_3, so wird

208) . . $V_1 = \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3, \quad V_2 = \mathfrak{u}_3 E_3 + \mathfrak{u}_1 E_1, \quad V_3 = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2.$

Andererseits wird nach 123) und 172)

209) . . . $V_1 = [e_1 \cdot UE_1], \quad V_2 = [e_2 \cdot UE_2], \quad V_3 = [e_3 \cdot UE_3].$

Die so gewonnene Auffassung für die einzelnen Glieder der Vielfachensumme 195) und für die Summen von je zweien dieser Glieder ermöglicht es nun aber in der That, fü diese Gröfsen eine Konstruktion zu geben, die den Kraftzerlegungen in der Mechanik entspricht, so dafs man dann also auch für die Stabkoordinaten u_i eine mechanische Deutung gewinnt.

Nach dem Vorbilde von S. 35 erhält man nämlich für die Zurückleitungen W_i des Stabes U und die ergänzenden Zurückleitungen V_i die folgende Konstruktion (vgl. Fig. 52):

Man bringe die Gerade des Stabes U zum Durchschnitt mit der Dreiecksseite E_i im Punkte t_i und verbinde t_i mit der jener Seite gegenüberliegenden Ecke e_i. Sodann zerlege man U in zwei Komponenten, die den Geraden der Stäbe E_i und $[t_i e_i]$ angehören, so sind diese Komponenten die gesuchten Zurückleitungen W_i und V_i.

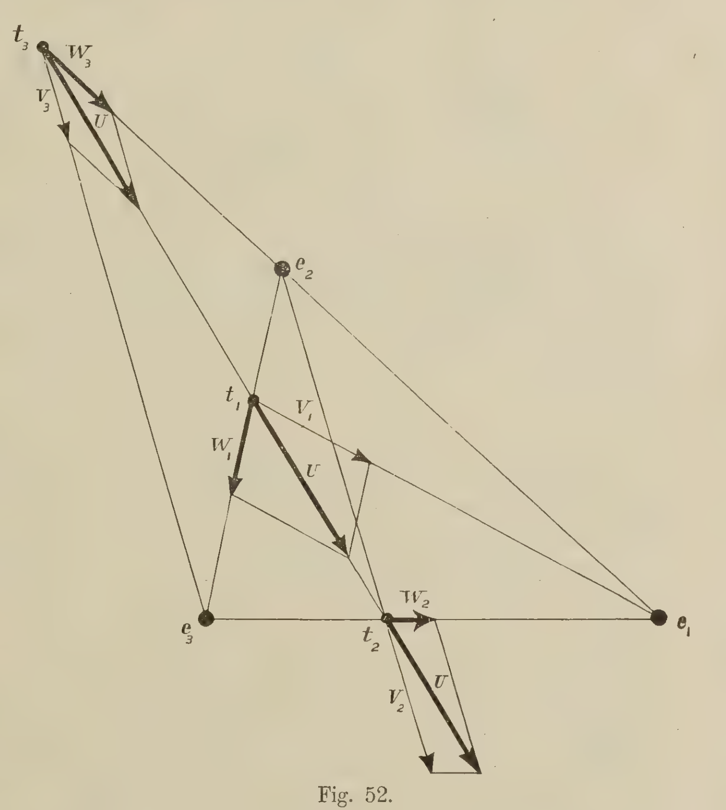


Fig. 52.

Für die Koordinaten $\mathfrak{u}_i$ selbst ergiebt sich dann die Darstellung

210) . . . . $\mathfrak{u}_1 = \frac{W_1}{E_1}, \quad \mathfrak{u}_2 = \frac{W_2}{E_2}, \quad \mathfrak{u}_3 = \frac{W_3}{E_3}$

das heifst: Die Koordinaten u_i eines Stabes U sind die Verhältnisse aus seinen Zurückleitungen W_i auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschlufs der Gegenecken und aus den in diesen Seiten liegenden Grundstäben E_i.

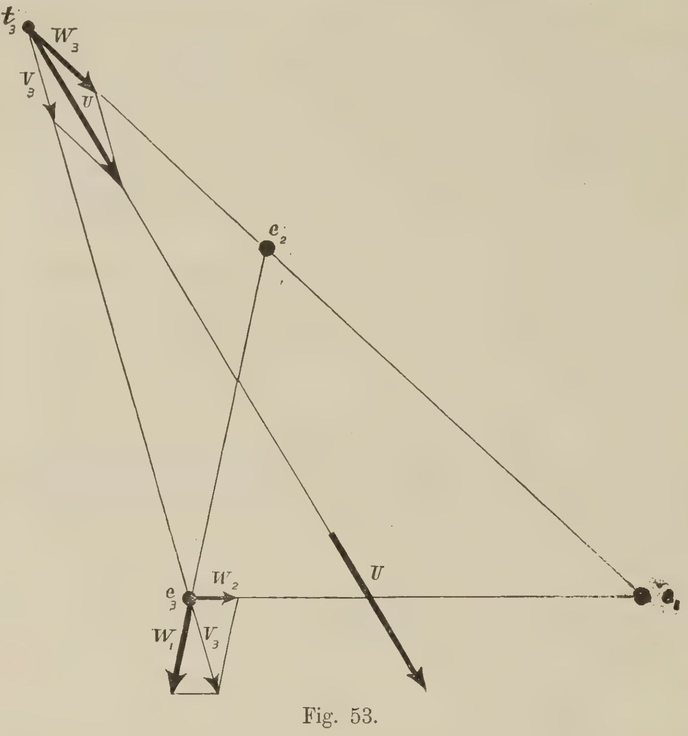


Fig. 53.

Will man statt der Grundstäbe E_i die Seiten S_i des Fundamentaldreiecks einführen, so hat man noch die Gleichungen 177) zu benutzen und erhält so

$$211)\begin{cases} \mathfrak{u}_1 = \dfrac{W_1}{\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3\,S_1},\ \mathfrak{u}_2 = \dfrac{W_2}{\mathfrak{m}_3\,\mathfrak{m}_1\,S_2}, \\ \mathfrak{u}_3 = \dfrac{W_3}{\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,S_3}. \end{cases}$$

Schliefslich möge noch bemerkt werden, dafs zur Konstruktion der drei Zurückleitungen W_i auch schon *zwei* Parallelogrammkonstruktionen ausreichen. Hat man nämlich nach dem soeben entwickelten Verfahren den Stab U in seine beiden Komponenten V_3 und W_3 zerlegt (vgl. Fig. 53), so braucht man nur noch den Stab V_3 als Summe zweier Stäbe darzustellen, die in den Geraden der Stäbe E_1 und E_2 liegen, dann sind diese beiden Stäbe die gesuchten beiden andern Zurückleitungen W_1 und W_2. Eine solche Summendarstellung ist immer möglich, da ja nach obiger Konstruktion die Gerade des Stabes V_3 durch den Punkt e_3, d. h. durch den Schnittpunkt der Geraden von E_1 und E_2 hindurchgeht.

Für die analytische Behandlung der Kollineation und Reciprocität ist es von Interesse, die Länge $\mathfrak{l}'$ des Einheitsstabes durch seinen Abstand vom Einheitspunkte und die Masse $\mathfrak{m}'$ dieses Punktes auszudrücken. Dazu führe man in die Erklärungsgleichungen des Einheitsstabes und Einheitspunktes

200) . . . . $E = E_1 + E_2 + E_3$ und

161) . . . . $e = e_1 + e_2 + e_3$

für E und e ihre Werte aus 201) und 163) ein und erhält die Gleichungen

212) . . . . $\mathfrak{l}'A = E_1 + E_2 + E_3$ und

213) . . . . $\mathfrak{m}'a = e_1 + e_2 + e_3$.

Diese beiden Gleichungen 212) und 213) multipliziere man mit einander unter Berücksichtigung der Gleichungen 172) und 173), so ergiebt sich für die Länge $\mathfrak{l}'$ des Einheitsstabes die Gleichung

214) . . . . $\mathfrak{l}'\,\mathfrak{m}'[Aa] = 3$.

Das hier auftretende Produkt $[Aa]$ besitzt nun aber eine einfache geometrische Bedeutung. Denn da der Stab A die Länge 1 hat, und auch der Punkt a ein einfacher Punkt ist, so ist das Blatt $[Aa]$ gleich dem Abstande des Einheitspunktes vom Einheitsstabe und zwar ist dieser Abstand positiv zu nehmen, weil nach der Festsetzung auf S. 54 der Sinn des einfachen Stabes A so gewählt werden sollte, dafs das Produkt $[Aa]$ positiv wird. Bezeichnet man daher noch den positiv genommenen Abstand des Einheitspunktes und Einheitsstabes mit $\mathfrak{q}'$, so läfst sich die Gleichung 214) in der Form schreiben

215) . . . . $\mathfrak{l}'\mathfrak{m}'\mathfrak{q}' = 3,$

und man erhält also für die Länge $\mathfrak{l}'$ des Einheitsstabes den Wert

216) . . . . $\mathfrak{l}' = \dfrac{3}{\mathfrak{m}'\mathfrak{q}'}.$

Aus ihm folgt insbesondere, da $\mathfrak{q}'$ positiv ist:

Die Längenzahl $\mathfrak{l}'$ des Einheitsstabes hat immer dasselbe Vorzeichen wie die Masse $\mathfrak{m}'$ des Einheitspunktes.

Die Formeln 215) und 216) lassen sich sehr leicht dadurch verallgemeinern, dafs man in der obigen Entwickelung an die Stelle des Einheitsstabes oder des Einheitspunktes einen *beliebigen Stab* U oder einen *beliebigen Punkt* x treten läfst.

Führt man nämlich in die Gleichung

195) . . . . $U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3$

für U seinen Wert aus 197) ein und multipliziert die entstehende Gleichung

217) . . . . $\mathfrak{l}T = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3$

mit der Gleichung 213), so ergiebt sich für die Längenzahl $\mathfrak{l}$ des Stabes U die Gleichung

218) . . . . $\mathfrak{l}\mathfrak{m}'[Ta] = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3$

Hier ist dann wieder das Produkt $[Ta]$ der positiv genommene Abstand $\mathfrak{q}$ des Stabes U vom Einheitspunkte (vgl. S. 52); die Gleichung 218) nimmt daher die Form an

219) . . . . $\mathfrak{l}\mathfrak{m}'\mathfrak{q} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3.$

Man erhält somit für die Längenzahl $\mathfrak{l}$ des Stabes U den Wert

220) . . . . $\mathfrak{l} = \dfrac{1}{\mathfrak{m}'} \dfrac{\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3}{\mathfrak{q}}$

Aus ihm entnimmt man:

Unendlich ferne Stäbe mit endlichen Koordinaten sind unendlich kurz.

Ferner:

Die Koordinaten eines jeden Stabes, dessen Gerade durch den Einheitspunkt geht, genügen der Gleichung

221) . . . . $\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3 = 0.$

Die Gleichung 221) ist also die Gleichung des Einheitspunktes in Stabkoordinaten.

Dies ergiebt sich übrigens auch direkt; denn die Gleichung 221) ist nur eine Umformung der Gleichung

222) . . . . $[Ue] = 0,$

welche besagt, dafs die Gerade des Stabes U durch den Einheitspunkt e hindurchgeht.

Überhaupt ist ganz allgemein die Gleichung

223) . . . . $[Ux] = 0$

die Gleichung für die Incidenz des Punktes x und des Stabes U (vgl. S. 32) d. h. die Gleichung des Punktes x in Stabkoordinaten und die Gleichung der Geraden des Stabes U in Punktkoordinaten.

Schliefslich hat man noch die zu der Formel 220) dualistisch entsprechende Formel zu entwickeln. Dazu setze man in die Gleichung

178) . . . . $x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$

für x seinen Wert aus 179) ein, wodurch sie übergeht in

224) . . . . $\mathfrak{m} t = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3,$

und multipliziere dann diese Gleichung mit der Gleichung 212). So erhält man

225) . . . . $\mathfrak{l}' \mathfrak{m} [At] = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3.$

Hier stellt das Produkt $[At]$ den Abstand $\mathfrak{p}$ des Punktes x vom Einheitsstabe E dar, dieser Abstand positiv oder negativ genommen, je nachdem der Punkt x auf derselben Seite des Einheitsstabes liegt wie der Einheitspunkt oder nicht. Die Gleichung läfst sich daher auch in der Form schreiben

226) . . . . $\mathfrak{l}' \mathfrak{m} \mathfrak{p} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3.$

Man findet also für die Masse $\mathfrak{m}$ des Punktes x den Wert:

227) . . . . $\mathfrak{m} = \frac{1}{\mathfrak{l}'} \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3}{\mathfrak{p}}.$

Aus dieser Gleichung aber folgt wieder:

Unendlich ferne Punkte mit endlichen Koordinaten haben eine unendlich kleine Masse.

Ferner:

Die Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden des Einheitsstabes genügen der Gleichung

228) . . . . $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3 = 0.$

Diese Gleichung ist also die Gleichung der Geraden des Einheitsstabes in Punktkoordinaten.

Selbstverständlich läfst sich auch diese Gleichung wieder direkt ableiten; denn nach 223) lautet die Gleichung der Geraden des Einheitsstabes

229) . . . . $[Ex] = 0.$

Setzt man aber in diese Gleichung für den Einheitsstab E seinen Wert 200), für den Punkt x seine Koordinatendarstellung 178) ein und führt die Multiplikation aus, so erhält man in der That die Gleichung 228).

(Fortsetzung folgt.)

PUNKTRECHNUNG UND PROJEKTIVE GEOMETRIE

DRITTER TEIL:
DIE LINEAREN VERWANDTSCHAFTEN IN DER EBENE.

VON

Dr. HERMANN GRASSMANN,

OBERLEHRER AN DER LATEINISCHEN HAUPTSCHULE ZU HALLE a. S.

SEPARATABZUG AUS DER FESTSCHRIFT DER LATEINISCHEN HAUPTSCHULE

ZUR

ZWEIHUNDERTJÄHRIGEN JUBELFEIER DER FRANCKESCHEN STIFTUNGEN 1898.

Verlagsbuchhandlung

Halle a. S.



Siebenter Abschnitt.[1])

Die Kollineation.

Für die analytische Behandlung der geometrischen Verwandtschaften ist es von Nutzen, Brüche einzuführen, deren Zähler und Nenner geometrische Gröfsen, zum Beispiel Punkte oder Strecken, Stäbe oder Felder, sind. Die geometrische Bedeutung und die rechnerische Handhabung solcher „extensiven Brüche" möge an dem Beispiel der kollinearen Verwandtschaft in der Ebene entwickelt werden.

Man benutze dabei als Grundpunkte drei nicht in gerader Linie liegende vielfache Punkte

$$e_1 = \mathfrak{m}_1 a_1, \quad e_2 = \mathfrak{m}_2 a_2, \quad e_3 = \mathfrak{m}_3 a_3,$$

deren Massen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$ in der Weise bestimmt sein mögen, dafs das äufsere Produkt

230) . . $[e_1 e_2 e_3] = 1$

wird, und dafs überdies ein der Lage nach beliebig gewählter vierter Punkt e, welcher nur nicht mit zwei Grundpunkten in derselben geraden Linie liegen mag, der Einheitspunkt wird, dafs also

231) . $e = e_1 + e_2 + e_3$

wird (vgl. Fig. 54). Durch diese beiden Forderungen sind, wie im sechsten Abschnitte gezeigt ist, die Massen der drei Grundpunkte eindeutig bestimmt und damit auch die Masse des Einheitspunktes. Aufserdem läfst sich jeder beliebige weitere Punkt x der Ebene als Vielfachensumme der drei Grundpunkte e_1, e_2, e_3 also unter der Form

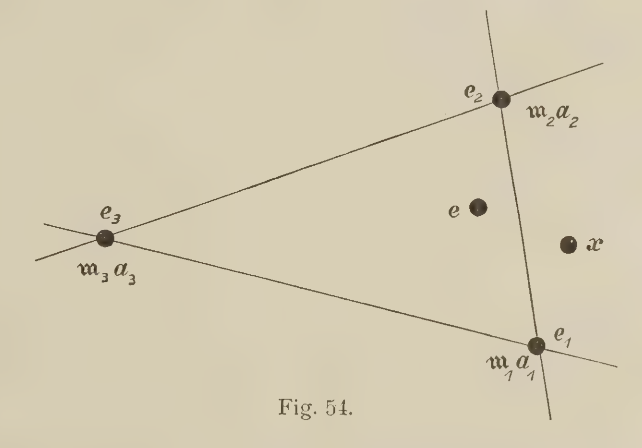


Fig. 54.

232) . . . . $x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$

---

1) Die drei ersten Abschnitte der vorliegenden Arbeit erschienen im Jahre 1894 als Beitrag für die Festschrift der Lateinischen Hauptschule zur zweihundertjährigen Jubelfeier der Universität Halle-Wittenberg unter dem Titel: Punktrechnung und projektive Geometrie. Erster Teil: Punktrechnung. Die drei folgenden Abschnitte bildeten die Beilage zum Programm der Lateinischen Hauptschule vom Jahre 1896 mit dem Titel: Punktrechnung und projektive Geometrie. Zweiter Teil: Grundlagen der projektiven Geometrie.

darstellen. Seine Ableitzahlen sind dabei die auf das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ als Fundamentaldreieck bezogenen Dreieckskoordinaten des Punktes x.

Will man jetzt einen Verwandtschaftsfaktor $\mathfrak{k}$ definieren, der jeden beliebigen Punkt x der Ebene bei der Multiplikation in einen (im Allgemeinen) von ihm getrennt liegenden, eindeutig bestimmten Punkt $y = x\mathfrak{k}$ derselben Ebene überführt, so hat man

erstens diejenigen Punkte b_1, b_2, b_3 festzulegen, die den Grundpunkten e_1, e_2, e_3 zugeordnet werden sollen, welche also den Gleichungen

233) . . . . $e_1\mathfrak{k} = b_1, \quad e_2\mathfrak{k} = b_2, \quad e_3\mathfrak{k} = b_3$

Genüge leisten. Daneben aber kann man

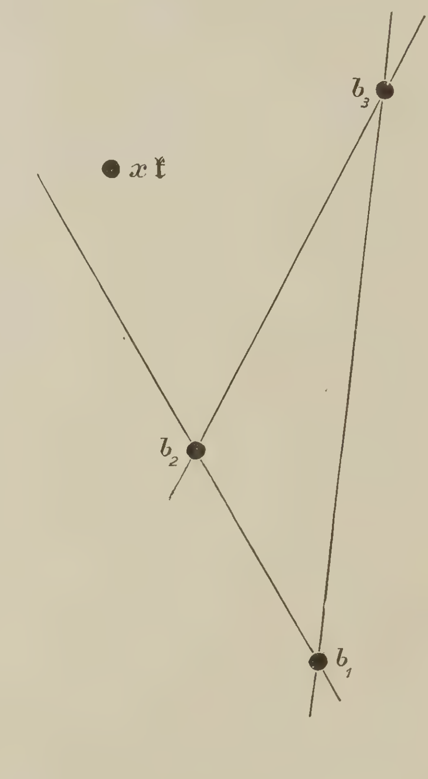
zweitens noch die Forderung stellen, es solle ein jeder Punkt

$$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3,$$

welcher durch die drei Zahlgröfsen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ aus den drei Grundpunkten e_1, e_2, e_3 abgeleitet ist, in denjenigen Punkt $x\mathfrak{k}$ umgewandelt werden, der aus den „Bildern" b_1, b_2, b_3 der drei Grundpunkte durch *dieselben* Ableitzahlen entwickelt wird, das heifst in den Punkt

234) . . $x\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 b_1 + \mathfrak{x}_2 b_2 + \mathfrak{x}_3 b_3.$

Durch die Punkte x und $x\mathfrak{k}$ wird dann die Ebene doppelt überdeckt. Zur Unterscheidung mögen die Punkte x die Punkte des ersten Systems und die Punkte $x\mathfrak{k}$ die Punkte des zweiten Systems genannt werden (vgl. Fig. 55).



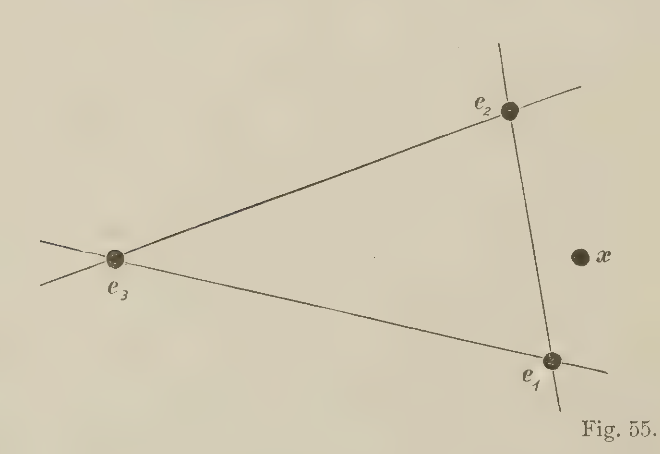


Fig. 55.

Der durch die beiden angegebenen Forderungen sachlich definierte Verwandtschaftsfaktor $\mathfrak{k}$ läfst sich nun aber formell durch einen Bruch mit den *drei* Nennern e_1, e_2, e_3 und den *drei* entsprechenden Zählern b_1, b_2, b_3 ausdrücken, das heifst in der Form

235) . . . . $\mathfrak{k} = \dfrac{b_1,\ b_2,\ b_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}.$

Durch eine solche Bruchdarstellung kann man nämlich andeuten, dafs aus jeder von den drei in den Nenner gestellten Gröfsen e_i bei der Multiplikation mit $\mathfrak{k}$ der entsprechende Zähler b_i hervorgeht, dafs also wirklich die drei Gleichungen bestehen

236) . . . . $e_i\mathfrak{k} = b_i, \quad i = 1, 2, 3.$

Man wird aber zugleich auch der zweiten von den beiden oben gestellten Forderungen gerecht, wenn man noch die Bestimmung hinzufügt, der Bruch $\mathfrak{k}$ solle sich einer Vielfachensumme von Punkten gegenüber bei der Multiplikation distributiv verhalten. In der That wird dann

$$x\mathfrak{k} = (\mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3)\,\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 e_1 \mathfrak{k} + \mathfrak{x}_2 e_2 \mathfrak{k} + \mathfrak{x}_3 e_3 \mathfrak{k},$$

das heifst wegen 236)

$$x\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 b_1 + \mathfrak{x}_2 b_2 + \mathfrak{x}_3 b_3,$$

wie oben in 234) verlangt wurde.

Setzt man endlich noch fest, dafs zwei Verwandtschaftsfaktoren, welche Punkte in Punkte überführen, und ebenso zwei Vielfachensummen solcher Verwandtschaftsfaktoren dann und nur dann einander gleich gesetzt werden sollen, wenn sie mit *jedem* Punkt der Ebene multipliziert Gleiches liefern, wobei wie immer an der Distributivität der Multiplikation festgehalten wird, so ist damit der Verwandtschaftsbruch $\mathfrak{k}$ *auch als Gröfse* vollständig definiert. Insbesondere erscheinen alsdann die Zahlgröfsen als specielle Fälle eines solchen Verwandtschaftsbruches. So hat zum Beispiel der Bruch

$$\frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

mit der Zahlgröfse 1 die Eigenschaft gemein, jeden Punkt x bei der Multiplikation unverändert zu lassen, und man kann daher jenen Bruch

$$\frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{e_1,\ e_2,\ e_3} = 1$$

setzen. Damit hat man dann zugleich die Möglichkeit gewonnen, einen Verwandtschaftsbruch von der Form 235) mit einer beliebigen Zahlgröfse durch Addition oder Subtraktion zu verknüpfen.

Ferner ergiebt sich sofort, dafs es zur Gleichheit zweier solcher Verwandtschaftsbrüche *hinreicht*, wenn sie mit *drei* nicht in gerader Linie liegenden Punkten multipliziert Gleiches liefern. Sind nämlich $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ zwei solche Verwandtschaftsbrüche, welche mit drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten d_1, d_2, d_3 multipliziert Gleiches liefern, für die also die Gleichungen bestehen

$$\dagger)\ \ldots\ldots\quad d_1\mathfrak{k} = d_1\mathfrak{k}',\quad d_2\mathfrak{k} = d_2\mathfrak{k}',\quad d_3\mathfrak{k} = d_3\mathfrak{k}',$$

so wird sicher auch für *jeden beliebigen* Punkt x

$$x\mathfrak{k} = x\mathfrak{k}',$$

so dafs man also auch setzen kann

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}'.$$

Denn jeder beliebige Punkt x der Ebene läfst sich aus den drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten d_1, d_2, d_3 numerisch ableiten. Es sei etwa

$$x = \mathfrak{a}_1 d_1 + \mathfrak{a}_2 d_2 + \mathfrak{a}_3 d_3;$$

dann wird

$$\begin{aligned} x\mathfrak{k} &= \mathfrak{a}_1\, d_1\mathfrak{k} + \mathfrak{a}_2\, d_2\mathfrak{k} + \mathfrak{a}_3\, d_3\mathfrak{k}, \quad \text{das heifst wegen } \dagger) \\ &= \mathfrak{a}_1\, d_1\mathfrak{k}' + \mathfrak{a}_2\, d_2\mathfrak{k}' + \mathfrak{a}_3\, d_3\mathfrak{k}' \\ &= (\mathfrak{a}_1 d_1 + \mathfrak{a}_2 d_2 + \mathfrak{a}_3 d_3)\,\mathfrak{k}' \\ &= x\mathfrak{k}', \end{aligned}$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Aus der analytischen Forderung der Distributivität des Bruches $\mathfrak{k}$ entspringen unmittelbar die geometrischen Grundeigenschaften der Verwandtschaft,

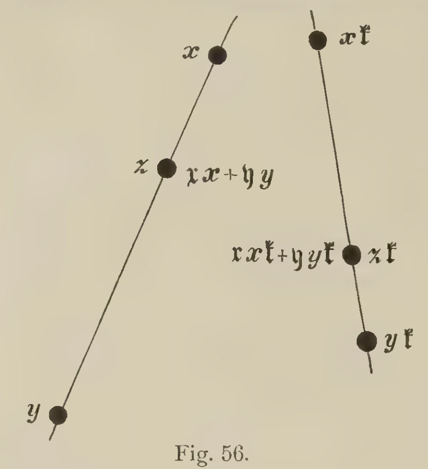


Fig. 56.

zunächst diejenige Eigenschaft, der die Verwandtschaft $\mathfrak{k}$ ihren Namen Kollineation verdankt. Sind nämlich x, y, z drei Punkte *einer* Geraden (vgl. Fig. 56), so läfst sich jeder von ihnen als Vielfachensumme der beiden andern darstellen, das heifst, es wird zum Beispiel

$$237) \quad \ldots \quad z = \mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y.$$

Den drei Punkten x, y, z entsprechen nun aber nach Obigem die Punkte

$$x\mathfrak{k},\ y\mathfrak{k},\ z\mathfrak{k},$$

und es wird mit Rücksicht auf 237)

$$z\mathfrak{k} = (\mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y)\mathfrak{k},$$

woraus wegen der Distributivität von $\mathfrak{k}$ folgt, dafs

$$238) \quad \ldots \quad z\mathfrak{k} = \mathfrak{x}\,x\mathfrak{k} + \mathfrak{y}\,y\mathfrak{k}$$

ist. Diese Gleichung aber zeigt wirklich, dafs auch der Punkt $z\mathfrak{k}$ mit den Punkten $x\mathfrak{k}$ und $y\mathfrak{k}$ auf *einer* Geraden liegt. Die Verwandtschaft $\mathfrak{k}$ hat also die Eigenschaft, dafs Punkten, die zusammen auf einer Geraden liegen, die also, wie man sagt, kollinear sind, stets wieder kollineare Punkte entsprechen. Aus diesem Grunde heifst die Verwandtschaft $\mathfrak{k}$ die kollineare Verwandtschaft oder Kollineation.

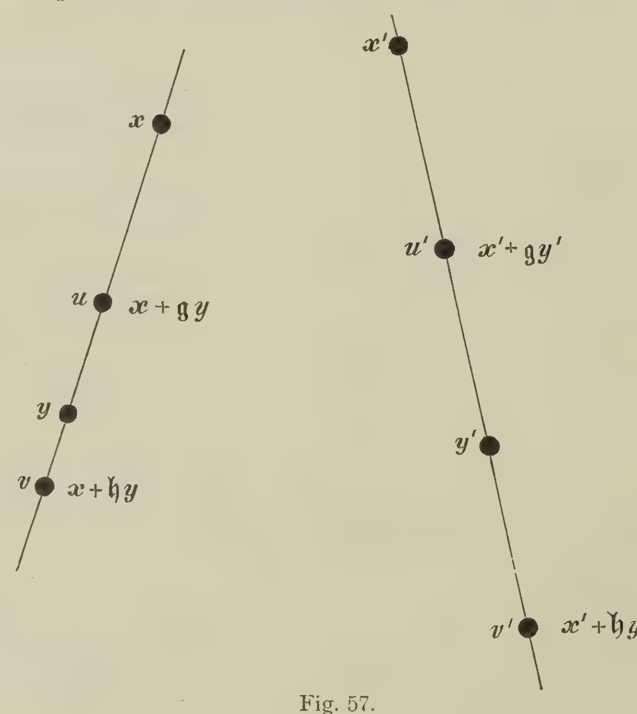


Fig. 57.

Eine zweite Eigenschaft der kollinearen Verwandtschaft, die mit der ersten eng zusammenhängt, läfst sich ebenfalls unmittelbar aus der Distributivität des Bruches $\mathfrak{k}$ ableiten, nämlich die *Invarianz des Doppelverhältnisses* von vier Punkten einer Geraden.

Wie schon gelegentlich der Einführung des Doppelverhältnisses (Teil II, S. 38) entwickelt ist, lassen sich vier in einer Geraden liegende Punkte, auf deren Masse es nicht ankommt, stets in der Form darstellen

$$x,\ y,\ u = x + \mathfrak{g}y,\ v = x + \mathfrak{h}y$$

(vgl. Fig. 57), und das Doppelverhältnis des Punktwurfes $xyuv$ wird

$$239) \quad \ldots \ldots \quad \frac{[xu]}{[uy]} : \frac{[xv]}{[vy]} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}},$$

das heifst gleich dem Verhältnis der Parameter des dritten und des vierten Punktes. Sind nun x', y', u', v' diejenigen Punkte, die den Punkten x, y, u, v jenes Wurfes in der Kollineation $\mathfrak{k}$ zugeordnet sind, so wird

$x' = x\mathfrak{k}$, $y' = y\mathfrak{k}$ und mit Rücksicht auf die Distributivität von $\mathfrak{k}$

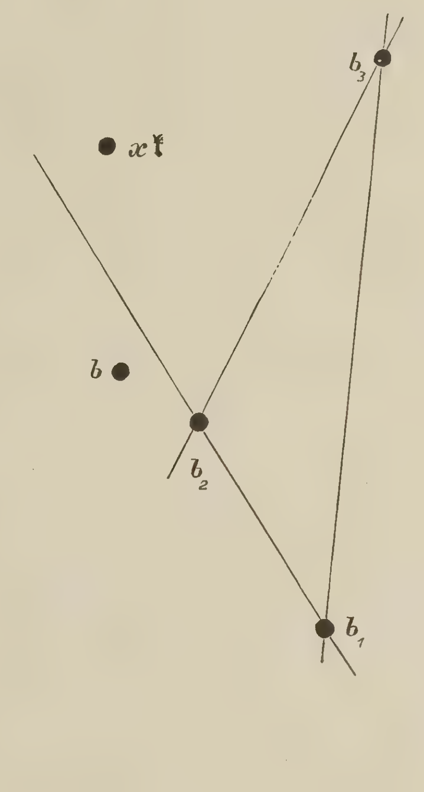
$$u' = u\mathfrak{k} = (x + \mathfrak{g}y)\,\mathfrak{k} = x\mathfrak{k} + \mathfrak{g}\,y\mathfrak{k} = x' + \mathfrak{g}y'$$
$$v' = v\mathfrak{k} = (x + \mathfrak{h}y)\,\mathfrak{k} = x\mathfrak{k} + \mathfrak{h}\,y\mathfrak{k} = x' + \mathfrak{h}y'.$$

Die vier Punkte des zugeordneten Wurfes erscheinen daher unter der Form

$$x',\ y',\ u' = x' + \mathfrak{g}y',\ v' = x' + \mathfrak{h}y'.$$

Sein Doppelverhältnis wird also wieder

$$240) \quad \ldots \quad \frac{[x'u']}{[u'y']} : \frac{[x'v']}{[v'y']} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}.$$



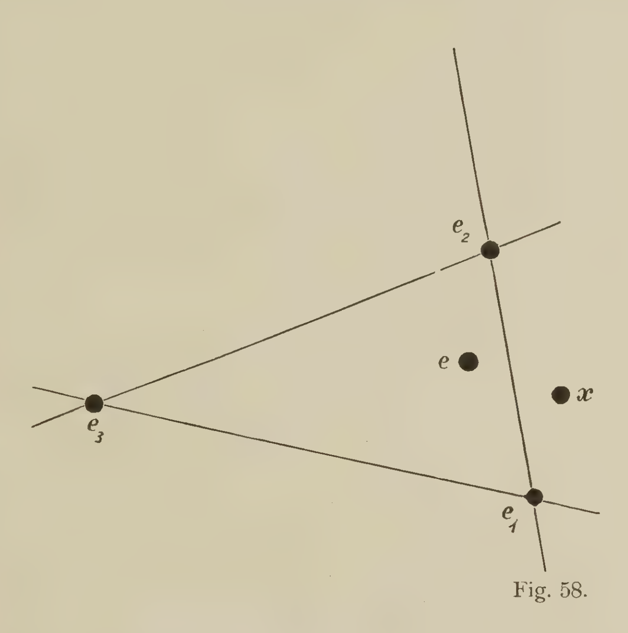


Fig. 58.

Aus der Invarianz des Doppelverhältnisses eines Punktwurfes aber folgert man weiter den Satz:

Jede Punktreihe wird durch eine Kollineation in eine *projektive* Punktreihe übergeführt.

Will man noch die Frage beantworten, *wie viele* Punkte man in den beiden Systemen der Punkte x und $x\mathfrak{k}$ beliebig wählen darf, um die Verwandtschaft festzulegen, so denke man sich auch über die Massen $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$ der Zählerpunkte b_1, b_2, b_3 des Bruches $\mathfrak{k}$ in entsprechender Weise verfügt wie über die Massen der Nennerpunkte, nämlich so, dafs

erstens das Produkt

241) . . . . $[b_1\, b_2\, b_3] = 1$ wird, und dafs

zweitens ein der Lage nach beliebig gewählter Punkt b der Einheitspunkt der drei Punkte b_1, b_2, b_3 wird, dafs also

242) $$b = b_1 + b_2 + b_3$$

wird (vgl. Fig. 58).

Durch diese beiden Forderungen sind dann auch die Massen der drei Zählerpunkte b_i eindeutig bestimmt, und es wird zugleich

243) $$b = b_1 + b_2 + b_3 = e_1\mathfrak{k} + e_2\mathfrak{k} + e_3\mathfrak{k} = (e_1 + e_2 + e_3)\mathfrak{k} = e\mathfrak{k},$$

das heifst, der Einheitspunkt b des Zählersystems wird durch die Kollineation $\mathfrak{k}$ dem Einheitspunkte e des Nennersystems zugewiesen. Da nun aber sowohl die vier Punkte e_1, e_2, e_3 und e, wie die vier Punkte b_1, b_2, b_3 und b ihrer Lage nach ganz beliebig gewählt werden können, so hat man den folgenden Fundamentalsatz:

Um eine Kollineation in der Ebene festzulegen, kann man *vier* beliebig gelegenen Punkten des einen Systems *vier* beliebig gelegene Punkte des andern zuweisen. Dadurch ist dann die Verwandtschaft eindeutig bestimmt.

Durch die soeben getroffenen Festsetzungen über die Massen der Zählerpunkte b_i sind die drei Zähler des Bruches $\mathfrak{k}$ mit seinen drei Nennern durchaus gleichartig definiert. Der durch die Vertauschung der Zähler und Nenner von $\mathfrak{k}$ hervorgehende reciproke Bruch

244) $$\frac{1}{\mathfrak{k}} = \frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{b_1,\ b_2,\ b_3}$$

wird daher ebenfalls eine Kollineation darstellen müssen, und zwar gerade die umgekehrte, „inverse“ Kollineation, durch welche die Punkte $x\mathfrak{k}$ des zweiten Systems der Kollineation $\mathfrak{k}$ in die entsprechenden Punkte x des ersten Systems zurückverwandelt werden. Denn nach dem Begriffe des extensiven Bruches wird

245) $$b_i \frac{1}{\mathfrak{k}} = e_i.$$

Ist also wieder

$$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3, \text{ somit}$$
$$x\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 b_1 + \mathfrak{x}_2 b_2 + \mathfrak{x}_3 b_3, \text{ so wird}$$
$$x\mathfrak{k}\frac{1}{\mathfrak{k}} = (\mathfrak{x}_1 b_1 + \mathfrak{x}_2 b_2 + \mathfrak{x}_3 b_3)\frac{1}{\mathfrak{k}}$$
$$= \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$$
$$= x, \text{ das heifst, es wird wirklich}$$

246) $$x\mathfrak{k}\frac{1}{\mathfrak{k}} = x.$$

Eine besondere Betrachtung verdienen noch diejenigen Punkte, welche durch die Kollineation *den Strecken der Ebene zugewiesen werden*, und andrerseits die Punkte, die durch die Kollineation *in Strecken verwandelt werden*. Wie in Teil I auf S. 4 ff. gezeigt ist, können die Strecken der Ebene als die im Endlichen liegenden und in ihm verschiebbaren, gleichsam greifbar gewordenen Abbilder der unendlich fernen Punkte

aufgefafst werden, und eine solche Strecke stellte sich dar als die Differenz zweier im Endlichen liegenden Punkte von gleicher Masse. Leitet man zum Beispiel aus den Grundpunkten e_i durch Division mit ihrer Masse $\mathfrak{m}_i$ die entsprechenden einfachen Punkte ab und bildet aus diesen die Differenzen

$$247) \quad \ldots \ldots \quad g_1 = \frac{e_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3}, \quad g_2 = \frac{e_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3},$$

so erhält man die Ausdrücke für zwei Strecken, die nach Länge und Richtung mit zwei Seiten des Fundamentaldreiecks übereinstimmen (vgl. Fig. 59). Aus diesen beiden Strecken läfst sich dann jede weitere Strecke g der Ebene numerisch ableiten, das heifst, es lassen sich zu jeder Strecke g der Ebene zwei Zahlgröfsen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ finden, für welche die Gleichung besteht

$$248) \quad \ldots \ldots \quad g = \mathfrak{a}_1 g_1 + \mathfrak{a}_2 g_2;$$

und umgekehrt stellt jeder Ausdruck von der Form 248) eine Strecke der Ebene dar.

Bezeichnet man weiter diejenigen Gröfsen, welche die Kollineation $\mathfrak{k}$ den drei Strecken g_1, g_2 und g zuweist, mit q_1, q_2 und q, setzt also

$$249) \quad \ldots \ldots \quad q_1 = g_1\mathfrak{k}, \quad q_2 = g_2\mathfrak{k}, \quad q = g\mathfrak{k}, \quad \text{so wird}$$

$$250) \quad \ldots \ldots \quad q_1 = \frac{b_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3}, \quad q_2 = \frac{b_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3} \quad \text{und}$$

$$251) \quad \ldots \ldots \quad q = \mathfrak{a}_1 q_1 + \mathfrak{a}_2 q_2.$$

Es bieten sich dann der Betrachtung zwei wesentlich verschiedene Fälle dar.

Erstens nämlich der Fall, wo die beiden Gröfsen q_1 und q_2 selbst wieder Strecken sind. Dann ist auch ihre Vielfachensumme q eine Strecke; die Kollineation $\mathfrak{k}$ verwandelt also überhaupt *jede* Strecke g der Ebene wieder in eine Strecke, oder anders ausgedrückt, sie weist jedem unendlich fernen Punkte wieder einen unendlich fernen Punkt zu. Daraus aber folgt, dafs *parallele Geraden*, das heifst gerade Linien, die einen unendlich fernen Punkt gemein haben, in gerade Linien derselben Art übergeführt werden, also bei ihrer Abbildung *parallel bleiben.*

Die durch diese Eigenschaft charakterisierte besondere Art der Kollineation führt den Namen Affinität. Ihr analytisches Merkmal findet man, wenn man die Bedingung aufsucht, unter der die Punkte des Minuendus und Subtrahendus der Differenzen 250) gleiche Massen besitzen. Dazu bezeichne man noch die Massen der Grundpunkte b_i des zweiten Systems mit $\mathfrak{n}_i$, so werden die in Betracht kommenden Brüche $\frac{b_1}{\mathfrak{m}_1}, \frac{b_2}{\mathfrak{m}_2}, \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3}$ gleiche Massen haben, sobald sich verhält

$$252) \quad \ldots \ldots \quad \mathfrak{m}_1 : \mathfrak{m}_2 : \mathfrak{m}_3 = \mathfrak{n}_1 : \mathfrak{n}_2 : \mathfrak{n}_3.$$

Man hat also den Satz:

Eine Kollineation wird zur Affinität, wenn die Massen der drei Grundpunkte des ersten Systems den Massen der drei Grundpunkte des zweiten proportioniert sind.

Der zweite, allgemeinere, Fall ist der, wo die Bedingung 252) *nicht* erfüllt ist, wo also die beiden durch die Differenzen 250) dargestellten Punkte q_1 und q_2 nicht beide zugleich unendlich fern sind (vgl. Fig. 59). Dann liegt wegen 251) ein jeder Punkt q, der im zweiten Systeme einem unendlich fernen Punkte g des ersten Systems entspricht, auf der durch die Punkte q_1 und q_2 bestimmten Geraden

$$253) \quad Q = [q_1 q_2] = \left[\left(\frac{b_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3}\right)\left(\frac{b_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3}\right)\right] = \frac{[b_2 b_3]}{\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3} + \frac{[b_3 b_1]}{\mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1} + \frac{[b_1 b_2]}{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2}.$$

Diese Gerade Q, deren Punkte den unendlich fernen Punkten des ersten Systems zugeordnet sind, heifst die Fluchtlinie des zweiten Systems. Der für sie gewonnene Ausdruck vereinfacht sich noch etwas, wenn man entsprechend den obigen Gleichungen

$$171) \quad \ldots\ldots \quad [e_2 e_3] = E_1, \quad [e_3 e_1] = E_2, \quad [e_1 e_2] = E_3$$

auch für die Produkte $[b_i b_k]$ kurze Bezeichnungen einführt, also etwa setzt

$$254) \quad \ldots\ldots \quad [b_2 b_3] = B_1, \quad [b_3 b_1] = B_2, \quad [b_1 b_2] = B_3.$$

Dadurch verwandelt sich der Ausdruck für Q in

$$255) \quad \ldots\ldots \quad Q = \frac{\mathfrak{m}_1 B_1 + \mathfrak{m}_2 B_2 + \mathfrak{m}_3 B_3}{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3}.$$

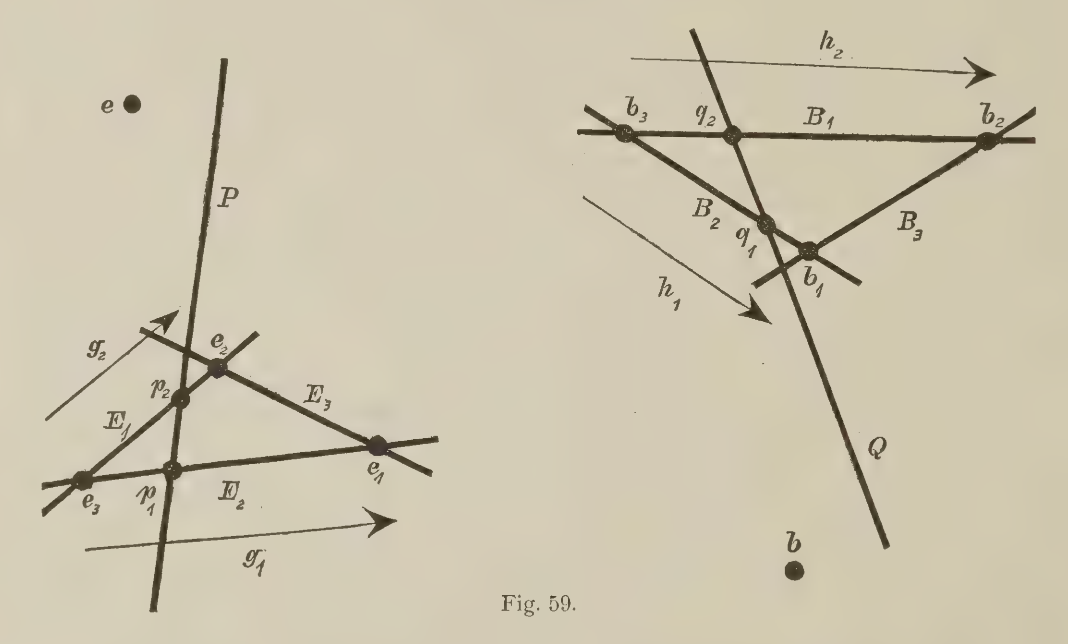


Fig. 59.

Eine zweite Fluchtlinie, nämlich die Fluchtlinie des ersten Systems, erhält man, wenn man diejenigen Punkte aufsucht, die durch die inverse Kollineation $\frac{1}{\mathfrak{k}}$ den unendlich fernen Punkten des zweiten Systems zugewiesen werden. Sind p_1 und p_2 die Punkte des ersten Systems, die den Strecken

$$256) \quad \ldots\ldots \quad h_1 = \frac{b_1}{\mathfrak{n}_1} - \frac{b_3}{\mathfrak{n}_3}, \quad h_2 = \frac{b_2}{\mathfrak{n}_2} - \frac{b_3}{\mathfrak{n}_3}$$

des zweiten Systems entsprechen, ist also

$$257) \quad \ldots\ldots \quad p_1 = h_1 \frac{1}{\mathfrak{k}}, \quad p_2 = h_2 \frac{1}{\mathfrak{k}}$$

und daher wegen 244)

$$258) \quad \ldots\ldots \quad p_1 = \frac{e_1}{\mathfrak{n}_1} - \frac{e_3}{\mathfrak{n}_3}, \quad p_2 = \frac{e_2}{\mathfrak{n}_2} - \frac{e_3}{\mathfrak{n}_3},$$

so erhält man für die Fluchtlinie P des ersten Systems die Darstellung

$$259) \quad . \quad P = [p_1 p_2] = \left[\left(\frac{e_1}{\mathfrak{n}_1} - \frac{e_3}{\mathfrak{n}_3}\right)\left(\frac{e_2}{\mathfrak{n}_2} - \frac{e_3}{\mathfrak{n}_3}\right)\right] = \frac{[e_2 e_3]}{\mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_3} + \frac{[e_3 e_1]}{\mathfrak{n}_3 \mathfrak{n}_1} + \frac{[e_1 e_2]}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2}$$

oder

$$260) \quad \ldots\ldots \quad P = \frac{\mathfrak{n}_1 E_1 + \mathfrak{n}_2 E_2 + \mathfrak{n}_3 E_3}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_3}.$$

Die Thatsache, dafs bei der *allgemeinen* Kollineation den unendlich fernen Punkten der Ebene sowohl im ersten wie im zweiten System die Punkte einer Geraden entsprechen, bildet den Grund dafür, dafs man sich bei Betrachtungen, die mit der *allgemeinen* kollinearen Verwandtschaft zusammenhängen, die unendlich fernen Punkte der Ebene in einer geraden Linie vereinigt denkt und geradezu von der *unendlich fernen Geraden* der Ebene spricht.

Fragt man schliefslich noch, ob es Punkte d_i in der Ebene giebt, die mit ihren entsprechenden Punkten $d_i\mathfrak{k}$ zusammenfallen, die sich also bei der Multiplikation mit dem Kollineationsbruche $\mathfrak{k}$ höchstens ihrer Masse nach ändern, nicht aber ihren Ort wechseln, so erhält man für diese Punkte — sie mögen die Doppelpunkte der Kollineation heifsen — die Gleichung

$$261) \quad \ldots\ldots \quad d_i\mathfrak{k} = \mathfrak{r}_i d_i,$$

in der $\mathfrak{r}_i$ einen Zahlfaktor bedeutet, der die Massenänderung des Punktes d_i bewirken soll, und in welcher selbstverständlich d_i nicht null sein darf. Diese Gleichung läfst sich zunächst in der Form schreiben

$$262) \quad \ldots\ldots \quad 0 = d_i(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{k})$$

und verwandelt sich, wenn man noch die Ableitzahlen von d_i mit $\mathfrak{d}_{i1}$, $\mathfrak{d}_{i2}$, $\mathfrak{d}_{i3}$ bezeichnet, also

$$263) \quad \ldots\ldots \quad d_i = \mathfrak{d}_{i1} e_1 + \mathfrak{d}_{i2} e_2 + \mathfrak{d}_{i3} e_3$$

setzt, in

$$0 = \mathfrak{d}_{i1} e_1 (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{k}) + \mathfrak{d}_{i2} e_2 (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{k}) + \mathfrak{d}_{i3} e_3 (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{k})$$

oder wegen 236) in

$$264) \quad \ldots \quad 0 = \mathfrak{d}_{i1}(e_1 \mathfrak{r}_i - b_1) + \mathfrak{d}_{i2}(e_2 \mathfrak{r}_i - b_2) + \mathfrak{d}_{i3}(e_3 \mathfrak{r}_i - b_3).$$

Hier können dann nicht alle drei Koeffizienten $\mathfrak{d}_{ik}$ gleichzeitig null sein, weil sonst wegen 263) auch d_i verschwinden würde, was oben ausgeschlossen ist. Wenn aber von den drei Zahlgröfsen $\mathfrak{d}_{i1}$, $\mathfrak{d}_{i2}$, $\mathfrak{d}_{i3}$ auch nur eine, etwa die Gröfse $\mathfrak{d}_{i1}$ von Null verschieden ist, so folgt aus der Gleichung 264) durch äufsere Multiplikation mit dem Produkte $[(e_2 \mathfrak{r}_i - b_2)(e_3 \mathfrak{r}_i - b_3)]$ und Division mit $\mathfrak{d}_{i1}$ die Gleichung

$$265) \quad \ldots\ldots \quad [(e_1 \mathfrak{r}_i - b_1)(e_2 \mathfrak{r}_i - b_2)(e_3 \mathfrak{r}_i - b_3)] = 0,$$

für die man wegen 230) und 241), 171) und 254) auch schreiben kann

$$266) \quad \mathfrak{r}_i^3 - \{[b_1 E_1] + [b_2 E_2] + [b_3 E_3]\}\mathfrak{r}_i^2 + \{[B_1 e_1] + [B_2 e_2] + [B_3 e_3]\}\mathfrak{r}_i - 1 = 0.$$

Diese Gleichung dritten Grades liefert für die Zahlgröfse $\mathfrak{r}_i$ drei Werte $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, welche die Hauptzahlen des Bruches $\mathfrak{k}$ heifsen mögen. Hat man sie bestimmt, und sind alle drei Hauptzahlen reell und von einander verschieden, so läfst sich zu jeder Hauptzahl $\mathfrak{r}_i$ mit Hülfe der Gleichung 264) der ihr zugehörige Doppelpunkt d_i er-

mitteln.[1]) Multipliziert man nämlich die Gleichung 264) der Reihe nach mit den Punkten $e_k \mathfrak{r}_i - b_k$ ($k = 1, 2, 3$), so erhält man die Verhältnisse der drei Ableitzahlen $\mathfrak{d}_{i1}$, $\mathfrak{d}_{i2}$, $\mathfrak{d}_{i3}$ des Punktes d_i. Durch Multiplikation mit dem Punkte $e_1 \mathfrak{r}_i - b_1$ ergiebt sich zum Beispiel die Gleichung

$$0 = \mathfrak{d}_{i2}\left[(e_1\mathfrak{r}_i - b_1)(e_1\mathfrak{r}_i - b_2)\right] + \mathfrak{d}_{i3}\left[(e_1\mathfrak{r}_i - b_1)(e_3\mathfrak{r}_i - b_3)\right].$$

Aus ihr aber und den beiden andern so entstehenden Gleichungen folgt die laufende Proportion

$$267)\quad \mathfrak{d}_{i1} : \mathfrak{d}_{i2} : \mathfrak{d}_{i3} = \left[(e_2\mathfrak{r}_i - b_2)(e_3\mathfrak{r}_i - b_3)\right] : \left[(e_3\mathfrak{r}_i - b_3)(e_1\mathfrak{r}_i - b_1)\right] : \left[(e_1\mathfrak{r}_i - b_1)(e_2\mathfrak{r}_i - b_2)\right],$$

welche mit einziger Ausnahme des Falles, wo die drei Produkte auf der rechten Seite gleichzeitig verschwinden, für jeden Wert von i die drei Ableitzahlen $\mathfrak{d}_{ik}$ des zugehörigen Doppelpunktes d_i bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt.

Diese drei Doppelpunkte sind im Falle ungleicher Hauptzahlen, auf den oben die Untersuchung beschränkt worden ist, auch ihrer Lage nach von einander verschieden. Denn angenommen, es wären zwei Punkte d_i bis auf einen Zahlfaktor einander gleich, also etwa

$$*)\quad d_2 = \mathfrak{s} d_1,$$

wo $\mathfrak{s}$ eine von Null verschiedene Zahlgröfse bedeutet, so müfste auch

$$d_2 \mathfrak{k} = \mathfrak{s}\; d_1 \mathfrak{k}, \quad \text{das heifst wegen 261)}$$
$$\mathfrak{r}_2 d_2 = \mathfrak{s}\; \mathfrak{r}_1 d_1 \quad \text{oder wegen *)}$$
$$\mathfrak{r}_2\, \mathfrak{s} d_1 = \mathfrak{s}\; \mathfrak{r}_1 d_1 \quad \text{sein.}$$

Da aber nach der Voraussetzung $\mathfrak{s}$ und d_1 von Null verschieden sind, so kann diese Gleichung nicht anders bestehen, als wenn $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$ ist, was oben ausgeschlossen ist. Folglich liegen die drei Punkte d_i von einander getrennt.

In dem Falle ungleicher Hauptzahlen können aber auch nicht etwa die drei Punkte d_i in einer geraden Linie liegen; denn dann müfste sich jeder von ihnen als Vielfachensumme der beiden andern darstellen lassen, also etwa

$$**)\quad d_3 = \mathfrak{s}_1 d_1 + \mathfrak{s}_2 d_2$$

sein, wo $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ zwei von Null verschiedene Zahlgröfsen sind. Diese Gleichung aber führt ebenfalls auf einen Widerspruch. Aus ihr folgt nämlich wieder durch Multiplikation mit $\mathfrak{k}$ die Gleichung

$$d_3 \mathfrak{k} = \mathfrak{s}_1\; d_1 \mathfrak{k} + \mathfrak{s}_2\; d_2 \mathfrak{k},$$

für die man wegen 261) auch schreiben kann

$$\mathfrak{r}_3 d_3 = \mathfrak{s}_1\; \mathfrak{r}_1 d_1 + \mathfrak{s}_2\; \mathfrak{r}_2 d_2 \quad \text{oder wegen **)}$$
$$\mathfrak{r}_3 (\mathfrak{s}_1 d_1 + \mathfrak{s}_2 d_2) = \mathfrak{s}_1\; \mathfrak{r}_1 d_1 + \mathfrak{s}_2\; \mathfrak{r}_2 d_2 \quad \text{oder endlich}$$
$$\dagger)\quad \ldots\ldots\quad \mathfrak{s}_1 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1) d_1 + \mathfrak{s}_2 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) d_2 = 0.$$

Nun stehen aber, wie oben bewiesen ist, die Punkte d_1 und d_2 nicht in einer Zahlbeziehung; und da nach der Voraussetzung die Zahlgröfsen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ ungleich Null sind, so kann die Gleichung †) nicht anders befriedigt werden, als wenn gleichzeitig

---

1) Vergleiche hierzu meine Darstellung der *Kollineationen des Raumes* in den Anmerkungen zur neuen Ausgabe der Ausdehnungslehre meines Vaters vom Jahre 1862 (Hermann Grafsmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke. Ersten Bandes zweiter Teil. In Gemeinschaft mit H. Grafsmann d. J. herausgegeben von Fr. Engel. Leipzig, Teubner 1896. S. 438—464). Dort habe ich auch die oben übergangenen Fälle gleicher und komplexer Hauptzahlen eingehend behandelt.

$$\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2 = 0$$

ist, was der Voraussetzung widersprechen würde, dafs alle drei Hauptzahlen von einander verschieden sind.

Unter den angegebenen Bedingungen besitzt daher die Kollineation drei ein Dreieck bildende Doppelpunkte.

Da die Kollineation $\mathfrak{k}$ den *Punkten einer Geraden* stets wieder *Punkte einer Geraden* zuweist, so kann man die durch den Bruch $\mathfrak{k}$ definierte Verwandtschaft auch als eine Beziehung zwischen den Geraden der Ebene auffassen. Diese Abbildung der Geraden der Ebene wird aber durch den Bruch $\mathfrak{k}$ nur indirekt vermittelt. Um eine direktere Darstellung derselben zu finden, berücksichtige man, dafs die Gerade eines beliebigen Stabes $[yz]$ durch die Kollineation $\mathfrak{k}$ in die Gerade des Stabes $[y\mathfrak{k}\cdot z\mathfrak{k}]$ übergeführt wird (vgl. Fig. 60), und suche die Beziehung zwischen den Ableitausdrücken dieser beiden Stäbe auf. Setzt man wie gewöhnlich

$$268) \quad \ldots \begin{cases} y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3 \\ z = \mathfrak{z}_1 e_1 + \mathfrak{z}_2 e_2 + \mathfrak{z}_3 e_3 , \end{cases}$$

so wird mit Rücksicht auf 171)

$$269) \quad . \ [yz] = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} E_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} E_3 .$$

Andrerseits wird

$$270) \quad \ldots \begin{cases} y\mathfrak{k} = \mathfrak{y}_1 b_1 + \mathfrak{y}_2 b_2 + \mathfrak{y}_3 b_3 \\ z\mathfrak{k} = \mathfrak{z}_1 b_1 + \mathfrak{z}_2 b_2 + \mathfrak{z}_3 b_3 \end{cases}$$

also bei Benutzung von 254)

$$271) \ [y\mathfrak{k}\cdot z\mathfrak{k}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} B_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} B_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} B_3 .$$

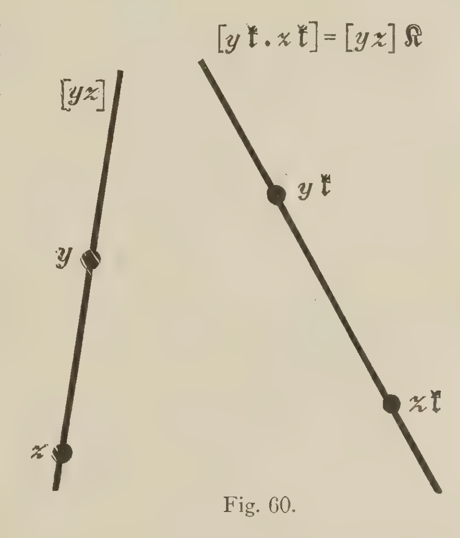


Fig. 60.

Der Stab $[y\mathfrak{k}\cdot z\mathfrak{k}]$ wird also aus den Stäben B_1, B_2, B_3 durch dieselben Zahlgröfsen abgeleitet, durch die der entsprechende Stab $[yz]$ aus den Grundstäben E_1, E_2, E_3 hervorging; und man wird daher allgemein die Geraden der Stäbe $[yz]$ und $[y\mathfrak{k}\cdot z\mathfrak{k}]$ einander zuweisen, wenn man neben dem Bruche $\mathfrak{k}$ noch einen zweiten extensiven Bruch $\mathfrak{K}$ einführt, dessen Nenner und Zähler de Stäbe E_i und B_i sind, das heifst die multiplikativen Kombinationen ohne Wiederholung zur zweiten Klasse aus den Nennern und Zählern des Bruches $\mathfrak{k}$, wenn man also setzt

$$272) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{K} = \frac{B_1,\ B_2,\ B_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}, \text{ wo}$$

$$273) \quad \ldots\ldots \begin{cases} E_1 = [e_2 e_3], & E_2 = [e_3 e_1], & E_3 = [e_1 e_2] \\ B_1 = [b_2 b_3], & B_2 = [b_3 b_1], & B_3 = [b_1 b_2] \end{cases}$$

ist. In der That wird dann

$$274) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [yz]\,\mathfrak{K} = [y\mathfrak{k}\cdot z\mathfrak{k}]$$

und man erhält den Satz:

Adjungiert man einem Kollineationsbruche $\mathfrak{k} = \frac{b_1,\, b_2,\, b_3}{e_1,\, e_1,\, e_3}$ einen zweiten Bruch $\mathfrak{K} = \frac{B_1,\, B_2,\, B_3}{E_1,\, E_2,\, E_3}$ in der Weise, dafs dieser neue Bruch den Seiten E_i des Nennerdreiecks von $\mathfrak{k}$ die Seiten B_i des Zählerdreiecks von $\mathfrak{k}$ zuordnet, diese Seiten dargestellt als die äufseren Produkte der Grundpunkte von $\mathfrak{k}$, so weist der „adjungierte Bruch“ $\mathfrak{K}$ überhaupt *jedem* Stabe $[yz]$, das heifst jedem Produkte zweier Punkte y und z des ersten Systems den Verbindungsstab $[y\mathfrak{k} \cdot z\mathfrak{k}]$ ihrer Bilder $y\mathfrak{k}$ und $z\mathfrak{k}$ im zweiten System zu.

Der Gleichung 274) läfst sich auch noch ein dualistisches Gegenstück an die Seite stellen. Da nämlich nach 174) den Formeln 273) die dualistisch entsprechenden Formeln

275) . . . . . $$\begin{cases} e_1 = [E_2\, E_3], & e_2 = [E_3\, E_1], \quad e_3 = [E_1\, E_2] \\ b_1 = [B_2\, B_3], & b_2 = [B_3\, B_1], \quad b_3 = [B_1\, B_2] \end{cases}$$

gegenüberstehen, so erhält man für den Schnittpunkt $[VW]$ zweier beliebigen Stäbe V und W, genau ebenso wie oben für den Verbindungsstab $[yz]$ zweier Punkte y und z, die Gleichung

276) . . . . $$[VW]\,\mathfrak{k} = [V\mathfrak{K} \cdot W\mathfrak{K}]$$

und damit den Satz (vgl. Fig. 61):

Dem Schnittpunkte zweier Stäbe V und W wird durch den Kollineationsbruch $\mathfrak{k}$ der Schnittpunkt derjenigen beiden Stäbe $V\mathfrak{K}$ und $W\mathfrak{K}$ zugeordnet, welche den Stäben V und W durch den adjungierten Bruch $\mathfrak{K}$ zugewiesen werden.

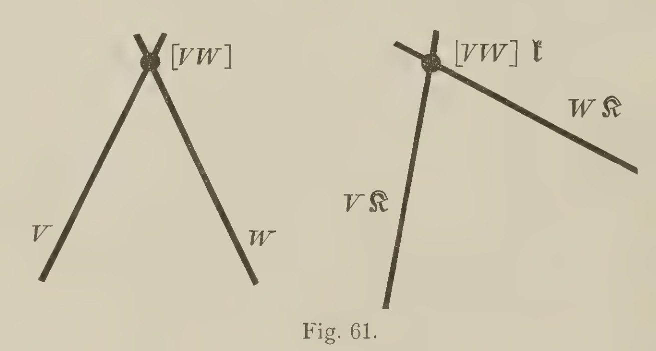


Fig. 61.

Überhaupt ergiebt die neue Auffassung der Kollineation als Stabverwandtschaft für jeden oben gewonnenen Satz eine dualistisch entsprechende Eigenschaft. Insbesondere kann man wieder aus der Distributivität des Bruches $\mathfrak{K}$ den Satz folgern:

Jeder Strahlwurf wird durch eine Kollineation in einen Strahlwurf von demselben Doppelverhältnis übergeführt.

Hieraus aber folgt weiter:

Jedes Strahlbüschel wird durch eine Kollineation in ein projektives Strahlbüschel verwandelt.

Ferner: Bei der kollinearen Abbildung wird das Bild einer Kurve zweiter Ordnung wieder eine Kurve zweiter Ordnung.

Wie in Teil II auf S. 44 gezeigt ist, kann man nämlich jede Kurve zweiter Ordnung als geometrischen Ort derjenigen Punkte x auffassen, welche vier feste Punkte a, b, c, d durch einen Strahlwurf von gegebenem Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$ projicieren. Wenn aber das Doppelverhältnis eines jeden Strahlwurfes bei der kollinearen Abbildung erhalten bleibt, so projiciert auch das Bild $x\mathfrak{k}$ des laufenden Punktes x jener Kurve zweiter Ordnung die Bilder $a\mathfrak{k}$, $b\mathfrak{k}$, $c\mathfrak{k}$, $d\mathfrak{k}$ jener vier festen Punkte durch einen Strahlwurf

von dem Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$, das heifst, auch der Punkt $x\mathfrak{k}$ beschreibt eine Kurve zweiter Ordnung.

Ganz ebenso läfst sich übrigens aus der Invarianz des Doppelverhältnisses eines Punktwurfes der Satz ableiten:

Bei der kollinearen Abbildung wird das Bild einer Kurve zweiter Klasse wieder eine Kurve zweiter Klasse.

Denn eine jede Kurve zweiter Klasse kann nach Teil II, S. 45 als Enveloppe aller Geraden U aufgefafst werden, die von vier festen Geraden in einem Punktwurf von gegebenem Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$ geschnitten werden. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses bei der kollinearen Abbildung wird daher auch das Bild $U\mathfrak{K}$ der Geraden U die Bilder $A\mathfrak{K}$, $B\mathfrak{K}$, $C\mathfrak{K}$, $D\mathfrak{K}$ jener vier festen Geraden in einem Punktwurfe vom Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$ schneiden, das heifst, selbst ein Kurve zweiter Klasse umhüllen müssen.

Um endlich noch die Frage zu entscheiden, ob eine Kollineation auch durch vier Paare zugeordneter Geraden festgelegt werden kann, beweise man zunächst den folgenden Hülfssatz:

Sind in einer Ebene vier gerade Linien G_1, G_2, G_3, G_4 gegeben, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, so läfst sich stets ein Fundamentaldreieck angeben, dessen Grundstäbe E_1, E_2, E_3 dreien von diesen Geraden angehören, während zugleich sein Einheitsstab

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

in der vierten Geraden gelegen ist (vgl. Fig. 62).

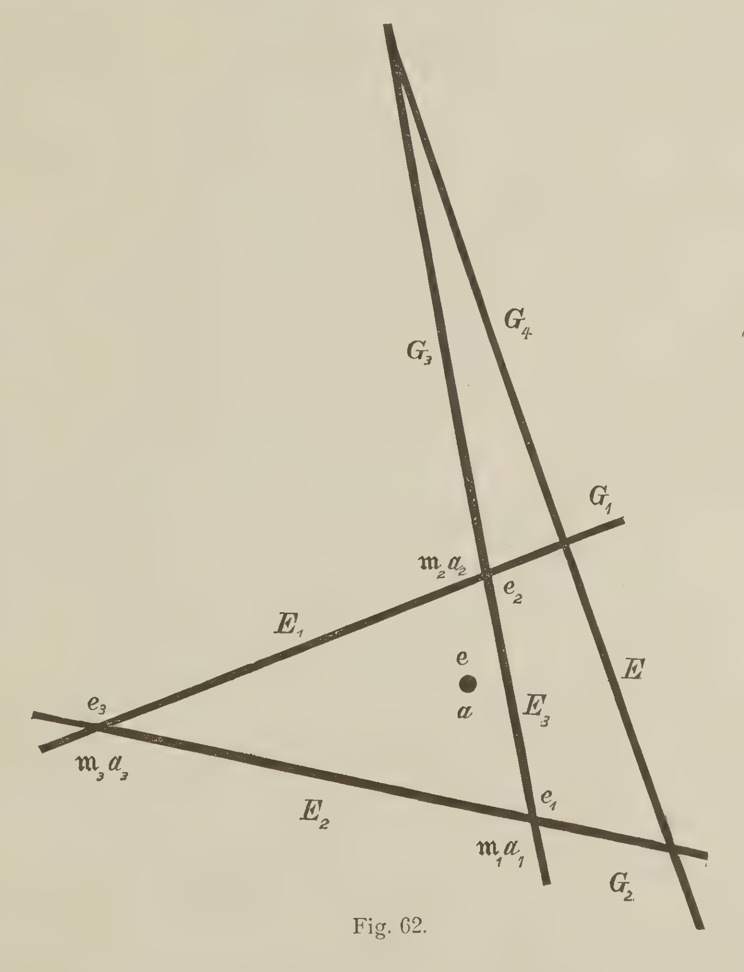


Fig. 62.

Zum Beweise bezeichne man mit a_1, a_2, a_3 diejenigen drei einfachen Punkte, in denen sich die drei Geraden G_1, G_2, G_3 schneiden, und mit a den einfachen Punkt, welcher der vierten Geraden G_4 in Bezug auf das Dreieck $a_1\, a_2\, a_3$ als Pol zugeordnet ist (vgl. Teil II, S. 54). Mit Rücksicht auf die soeben über die Geraden G_i getroffene Festsetzung, nach der keine drei von den vier Geraden G_i durch *einen* Punkt gehen sollen, nach der also insbesondere die Gerade G_4 nicht durch eine Ecke des Dreiecks $a_1\, a_2\, a_3$ hindurchgehen darf, kann dann der Pol a der Geraden G_4 auch nicht mit zweien von

den drei Ecken a_1, a_2, a_3 jenes Dreiecks in einer geraden Linie liegen. Der Punkt a erfüllt also in Bezug auf das Dreieck $a_1 a_2 a_3$ die Bedingung, die oben in Teil II, S. 46 an den Einheitspunkt des Fundamentaldreiecks gestellt wurde. Wählt man daher zu Grundpunkten drei vielfache Punkte e_1, e_2, e_3, welche mit den Punkten a_1, a_2, a_3 zusammenfallen, und deren Massen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{m}_2$ so bestimmt sein mögen, dafs ein mit a

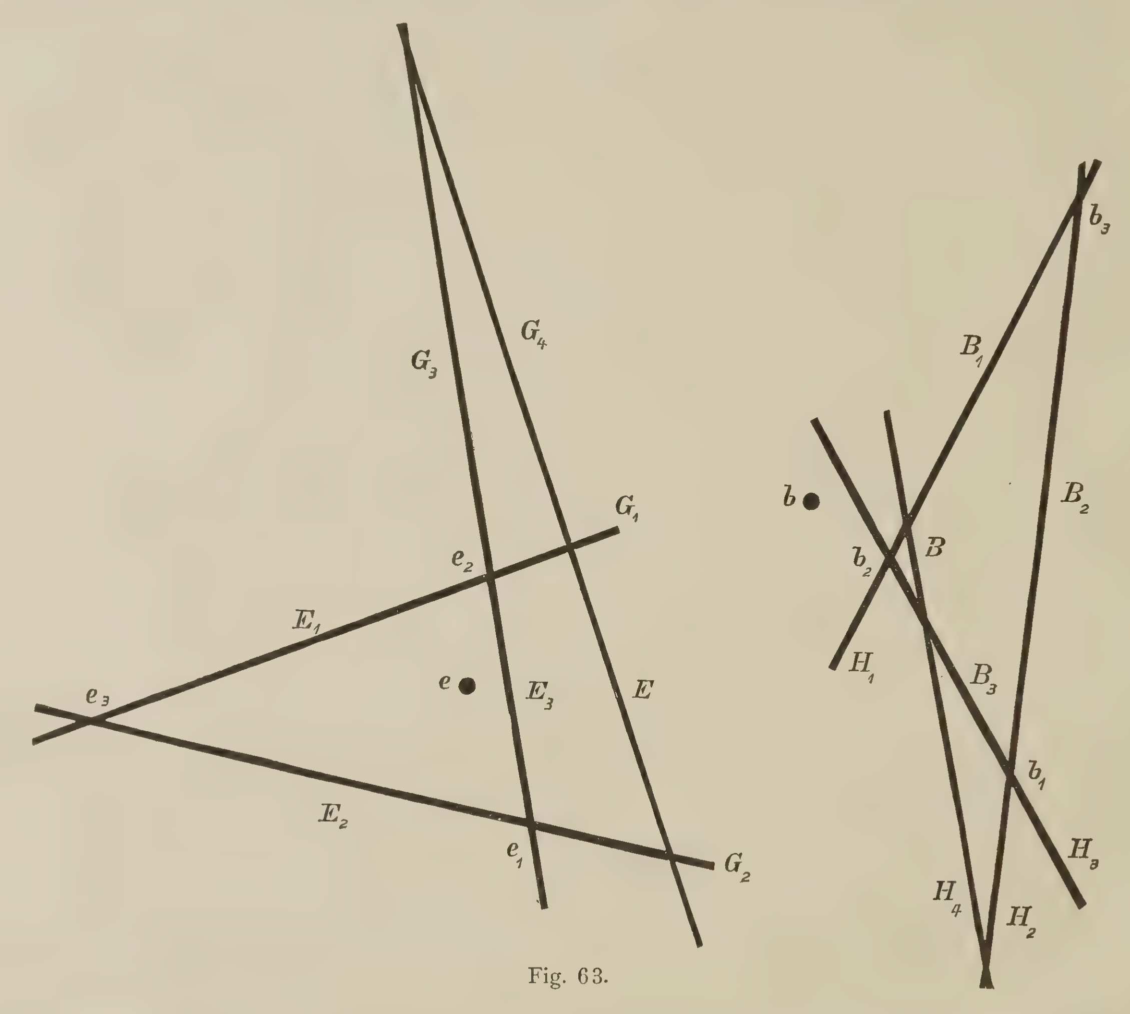


Fig. 63.

kongruenter Punkt e der Einheitspunkt wird, und dafs zugleich $[e_1 e_2 e_3] = 1$ wird, was nach Teil II, S. 46 ff. immer, aber auch nur auf eine Weise möglich ist, so gehören wirklich nicht nur die drei Grundstäbe E_1, E_2, E_3 des Systems den drei gegebenen Geraden G_1, G_2, G_3 an, sondern es liegt zugleich auch (vgl. Teil II, S. 53 f.) der Einheitsstab E des Fundamentaldreiecks auf der vierten Graden G_4. Damit aber ist unser Satz bewiesen.

Will man jetzt zwei ebene Systeme in der Weise kollinear auf einander beziehen, dafs vier gerade Linien von allgemeiner Lage G_1, G_2, G_3, G_4 in vier andere gerade Linien H_1, H_2, H_3, H_4 derselben Art übergeführt werden (vgl. Fig. 63), so wähle man als Nenner des Kollineationsbruches $\mathfrak{k}$ die soeben charakterisierten Punkte e_i, als

Zähler aber diejenigen Punkte b_i, die zu den vier Geraden H in derselben Beziehung stehen wie die e_i zu den vier Geraden G, das heifst, man benutze als Zählerpunkte b_i des Bruches $\mathfrak{k}$ die Schnittpunkte der drei ersten Geraden H_1, H_2, H_3 und bestimme die Massen dieser Punkte in der Weise, dafs der Pol der vierten Geraden H_4 in Bezug auf das Dreieck $b_1\, b_2\, b_3$ der Einheitspunkt b der drei Punkte b_i wird, und dafs überdies das Produkt $[b_1\, b_2\, b_3] = 1$ wird. Dann gehört zugleich der Einheitsstab des zweiten Systems

$$B = B_1 + B_2 + B_3$$

der vierten Geraden H_4 an, und es werden somit durch die Kollineation $\mathfrak{K}$ nicht nur die Stäbe E_1, E_2, E_3, die den Geraden G_1, G_2, G_3 angehören, in die Stäbe B_1, B_2, B_3 übergeführt, die auf den Geraden H_1, H_2, H_3 liegen, sondern zugleich auch der Stab E der Geraden G_4 in den Stab B der Geraden H_4, das heifst, es wird wirklich durch den Bruch

$$\mathfrak{k} = \frac{b_1,\ b_2,\ b_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

oder auch durch den adjungierten Bruch

$$\mathfrak{K} = \frac{B_1,\ B_2,\ B_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

die gewünschte Zuordnung geleistet. Man hat also den Satz:

Um eine Kollineation in der Ebene festzulegen, kann man vier beliebigen Geraden von allgemeiner Lage vier ebensolche Geraden zuweisen.

Die Frage nach den Doppelgeraden der Kollineation erledigt sich genau ebenso wie die nach den Doppelpunkten (vgl. S. 69 ff.). Aus der Erklärungsgleichung der Doppelgeraden D_i

$$277) \quad D_i\,\mathfrak{K} = \mathfrak{R}_i\, D_i$$

folgt für die Hauptzahlen $\mathfrak{R}_i$ des adjungierten Bruches $\mathfrak{K}$ die Gleichung dritten Grades

$$278) \quad [(E_1\,\mathfrak{R}_i - B_1)\,(E_2\,\mathfrak{R}_i - B_2)\,(E_3\,\mathfrak{R}_i - B_3)] = 0 \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{R}_i^3 - \{[e_1 B_1] + [e_2 B_2] + [e_3 B_3]\}\,\mathfrak{R}_i^2 + \{[E_1 b_1] + [E_2 b_2] + [E_3 b_3]\}\,\mathfrak{R}_i - 1 = 0.$$

Um diese Gleichung mit der Gleichung 266) in Beziehung zu bringen, schreibe man sie in der Form

$$279) \quad \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_i}\right)^3 - \{[b_1 E_1] + [b_2 E_2] + [b_3 E_3]\}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_i}\right)^2 + \{[B_1 e_1] + [B_2 e_2] + [B_3 e_3]\}\,\frac{1}{\mathfrak{R}_i} - 1 = 0.$$

Dann unterscheidet sie sich von der Gleichung 266) für die Hauptzahlen $\mathfrak{r}_i$ des ursprünglichen Bruches $\mathfrak{k}$ nur noch dadurch, dafs an die Stelle der Hauptzahl $\mathfrak{r}_i$ des Bruches $\mathfrak{k}$ der reciproke Wert $\frac{1}{\mathfrak{R}_i}$ der Hauptzahl $\mathfrak{R}_i$ des adjungierten Bruches $\mathfrak{K}$ getreten ist, während die Koeffizienten genau dieselben geblieben sind. Es müssen daher die reciproken Werte der Gröfsen $\mathfrak{R}_i$ mit den Gröfsen $\mathfrak{r}_i$ übereinstimmen, und man hat den Satz:

Die Hauptzahlen des adjungierten Bruches $\mathfrak{K}$ sind zu denen des ursprünglichen Bruches $\mathfrak{k}$ reciprok.

Für den Fall, dafs der Bruch $\mathfrak{k}$ drei reelle, ein Dreieck bildende Doppelpunkte d_i besitzt, versteht sich dies Ergebnis von selbst. Denn in diesem Falle kann man den Bruch $\mathfrak{k}$ (nach S. 63) auf die Form bringen

280) . . . . $\mathfrak{k} = \dfrac{\mathfrak{r}_1 d_1,\ \mathfrak{r}_2 d_2,\ \mathfrak{r}_3 d_3}{d_1,\quad d_2,\quad d_3}$

und erhält somit für den adjungierten Bruch $\mathfrak{K}$ die Darstellung

281) . . . . . . $\mathfrak{K} = \dfrac{\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 [d_2 d_2],\quad \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 [d_3 d_1],\quad \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 [d_1 d_2]}{[d_2 d_3],\qquad [d_3 d_1],\qquad [d_1 d_2]}$.

Nun entnimmt man aber aus der Form der Gleichung 266), dafs das Produkt ihrer drei Wurzeln $\mathfrak{r}_i$, das heifst, das Produkt

282) . . . . $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = 1$

ist, woraus folgt, dafs

$$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \frac{1}{\mathfrak{r}_1},\quad \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 = \frac{1}{\mathfrak{r}_2},\quad \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \frac{1}{\mathfrak{r}_3}$$

ist. Die Gleichung 281) gewinnt daher die Form

283) . . . . $\mathfrak{K} = \dfrac{\dfrac{1}{\mathfrak{r}_1}[d_2 d_3],\quad \dfrac{1}{\mathfrak{r}_2}[d_3 d_1],\quad \dfrac{1}{\mathfrak{r}_3}[d_1 d_2]}{[d_2 d_3],\qquad [d_3 d_1],\qquad [d_1 d_2]}$,

die das oben für die Hauptzahlen des Bruches $\mathfrak{K}$ gefundene Ergebnis bestätigt und zugleich zeigt, dafs für den Fall dreier reeller, ein Dreieck bildender Doppelpunkte die Doppelgeraden nichts anderes sind als deren gerade Verbindungslinien, was sich ja geometrisch von selbst versteht.

Achter Abschnitt.

Die allgemeine reciproke Verwandtschaft.

In ganz ähnlicher Weise wie die Kollineation läfst sich auch die Verwandtschaft der Reciprocität durch einen Bruch mit drei Nennern und drei Zählern darstellen; nur hat man als Zähler des Bruches anstatt dreier Punkte b_i drei Stäbe B_i zu wählen. Es seien also wie bisher zu Ecken des Fundamentaldreiecks drei vielfache Punkte e_1, e_2, e_3 gemacht, deren äufseres Produkt

284) . . . . $[e_1 e_2 e_3] = 1$

ist, und es seien aus den Grundstäben dieses Dreiecks

285) . . . . . . $E_1 = [e_2 e_3],\quad E_2 = [e_3 e_1],\quad E_3 = [e_1 e_2]$

mittelst der neun Zahlgröfsen $\mathfrak{b}_{ik}$ drei neue Stäbe abgeleitet

286) . . . . $\begin{cases} B_1 = \mathfrak{b}_{11} E_1 + \mathfrak{b}_{12} E_2 + \mathfrak{b}_{13} E_3 \\ B_2 = \mathfrak{b}_{21} E_1 + \mathfrak{b}_{22} E_2 + \mathfrak{b}_{23} E_3 \\ B_3 = \mathfrak{b}_{31} E_1 + \mathfrak{b}_{32} E_2 + \mathfrak{b}_{33} E_3 \end{cases}$

(vgl. Fig. 64). Das äufsere Produkt dieser drei Stäbe B_i, welches übrigens mit Rücksicht auf die schon mehrfach benutzte Gleichung

287) . . . . $[E_1 E_2 E_3] = 1$

der Determinante $|\mathfrak{b}_{ik}|$ aus den Ableitzahlen $\mathfrak{b}_{ik}$ der B_i gleich sein wird, möge mit $\mathfrak{b}$ bezeichnet werden, das heifst, es möge

288) . . . . $[B_1 B_2 B_3] = \mathfrak{b}$

gesetzt werden.[1]) Dann weist der Bruch

1) Es wird hier davon Abstand genommen, auch das äufsere Produkt der drei Zähler $= 1$ zu setzen, da unten auch ausartende Reciprocitäten betrachtet werden sollen, bei denen jenes Produkt verschwindet, für die also diese Festsetzung nicht zulässig sein würde.

289) . . . . $\boldsymbol{r} = \dfrac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$

nach dem Begriffe des extensiven Bruches seinen drei Nennern e_i die drei Zähler B_i zu, das heifst, es wird

290) . . . . $e_i \boldsymbol{r} = B_i$;

aufserdem aber führt er, falls man auch bei ihm an der Distributivität festhält, einen jeden Punkt

291) . . . . $x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$

der Ebene, der aus den drei Grundpunkten e_i durch die drei Zahlgröfsen $\mathfrak{x}_i$ abgeleitet ist, in denjenigen Stab

292) . . . . $x\boldsymbol{r} = \mathfrak{x}_1 B_1 + \mathfrak{x}_2 B_2 + \mathfrak{x}_3 B_3$

derselben Ebene über, der aus den Bildern B_i der Grundpunkte e_i durch dieselben Zahlgröfsen $\mathfrak{x}_i$ entwickelt wird.

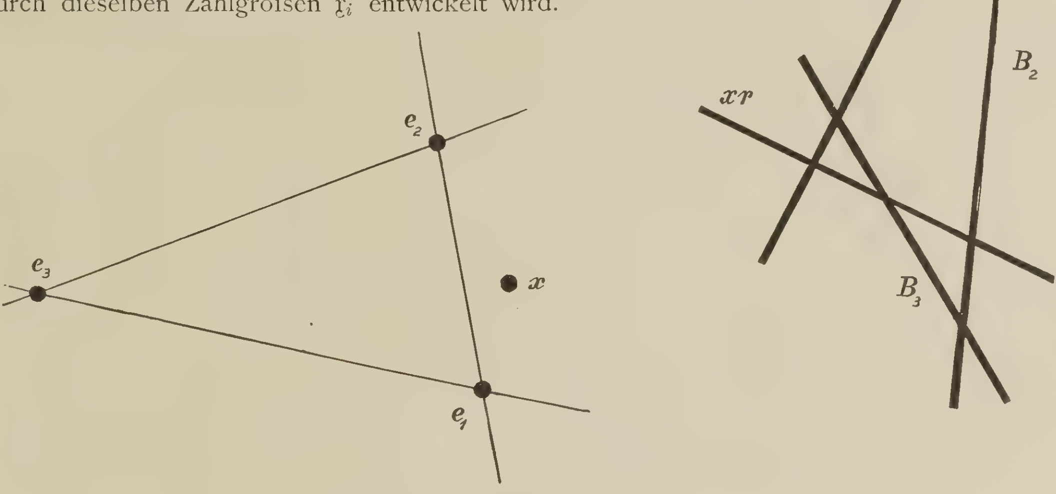


Fig. 64.

Man erhält so eine Zuordnung der Punkte und Geraden der Ebene, die den Namen reciproke Verwandtschaft oder Reciprocität führt, und die zu der Verwandtschaft der Kollineation in enger Beziehung steht. In der That findet eine ganze Reihe von Sätzen über kollineare Systeme bei der reciproken Verwandtschaft ihr Analogon. Dahin gehören folgende Sätze:

Drei Punkten einer Geraden entsprechen im reciproken Systeme drei Geraden, die durch einen Punkt gehen.

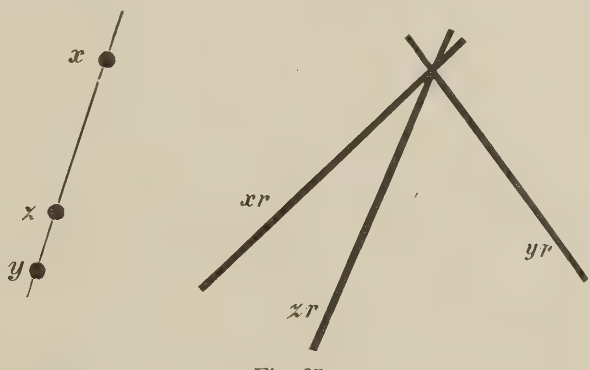


Fig. 65.

Ist nämlich z ein Punkt, der mit den Punkten x und y auf einer Geraden liegt (vgl. Fig. 65), ist also

$$z = \mathfrak{x} x + \mathfrak{y} y,$$

wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ Zahlgröfsen sind, so wird

$$z\mathbf{r} = \mathfrak{x}\, x\mathbf{r} + \mathfrak{y}\, y\mathbf{r}.$$

Diese Gleichung aber besagt, dafs der Stab $z\mathbf{r}$, der das Bild des Punktes z darstellt, mit den Bildern $x\mathbf{r}$ und $y\mathbf{r}$ der Punkte x und y durch einen Punkt geht.

Ferner: Die reciproke Verwandtschaft ordnet jedem Punktwurf einen Strahlwurf von gleichem Doppelverhältnis zu.

Der Beweis kann genau so geführt werden, wie bei dem entsprechenden Satze über die kollineare Verwandtschaft (vgl. S. 64 f.). Man stelle wie dort die Punkte des Wurfes in der Form dar

$$x, \quad y, \quad u = x + \mathfrak{g}y, \qquad v = x + \mathfrak{h}y$$

(vgl. Fig. 66), so hat ihr Doppelverhältnis (nach Teil II, S. 38) den Wert $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$; die zugeordneten Stäbe des entsprechenden Strahlwurfes im reciproken System besitzen nun aber die Werte

$$x\mathbf{r},\ y\mathbf{r},\ u\mathbf{r} = x\mathbf{r} + \mathfrak{g}\, y\mathbf{r},\ v\mathbf{r} = x\mathbf{r} + \mathfrak{h}\, y\mathbf{r},$$

ihr Doppelverhältnis hat daher nach Teil II, S. 41 genau denselben Wert $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$.

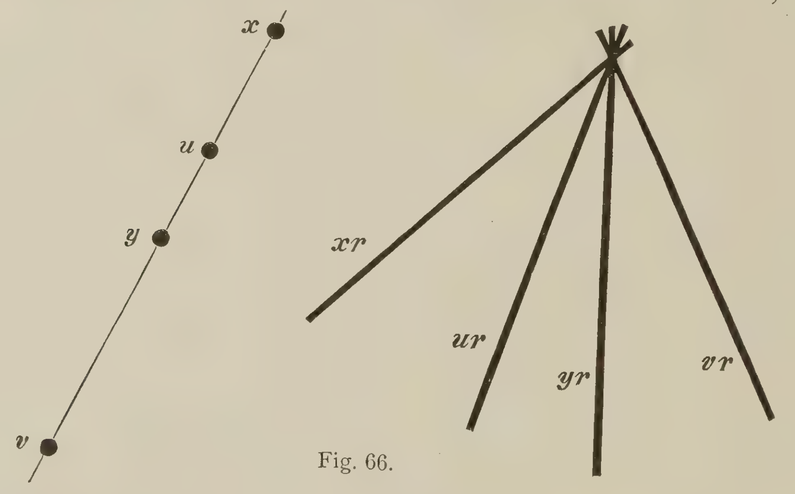


Fig. 66.

Hieraus aber folgt weiter:

Jede Punktreihe wird durch die reciproke Verwandtschaft in ein projektives Strahlbüschel übergeführt,

jede Kurve zweiter Klasse in eine Kurve zweiter Ordnung.

Dem Fundamentalsatze der Kollineation endlich entspricht der folgende Fundamentalsatz der reciproken Verwandtschaft:

Um eine Reciprocität in der Ebene festzulegen, kann man vier ihrer Lage nach beliebig gewählten Punkten vier beliebig gegebene Geraden derselben Ebene zuweisen.

In der That braucht man nur drei vielfache Punkte, die mit den drei ersten von den vier Punkten kongruent sind, zu Nennern des Bruches und drei Stäbe, die auf den drei ersten Geraden liegen, zu Zählern des Bruches zu machen und dabei die Massen jener drei Punkte und die Längen dieser drei Stäbe so zu wählen, dafs der vierte von den gegebenen Punkten der Einheitspunkt des Nennersystems und ein Stab

der vierten Geraden der Einheitsstab des Zählersystems wird (vgl. Fig. 67). Durch diese Forderungen sind die Massen der drei Nennerpunkte mit Rücksicht auf die Gleichung 284) eindeutig bestimmt. Aber auch die Längen der drei Zählerstäbe sind durch die obigen Bestimmungen wenigstens bis auf einen Proportionalitätsfaktor festgelegt; dieser bleibt willkürlich, da über den Wert des äufseren Produktes $[B_1 B_2 B_3]$ der drei Zähler keine Festsetzung getroffen ist.

Da die Reciprocität $\boldsymbol{r}$ den Punkten *einer Geraden* stets gerade Linien zuweist, die *durch einen Punkt gehen*, so ordnet der Bruch $\boldsymbol{r}$ auch jeder *geraden Linie des ersten Systems einen Punkt des zweiten* zu. Indes wird diese Beziehung der Geraden des ersten Systems auf die Punkte des zweiten durch den Bruch $\boldsymbol{r}$ nur indirekt vermittelt.

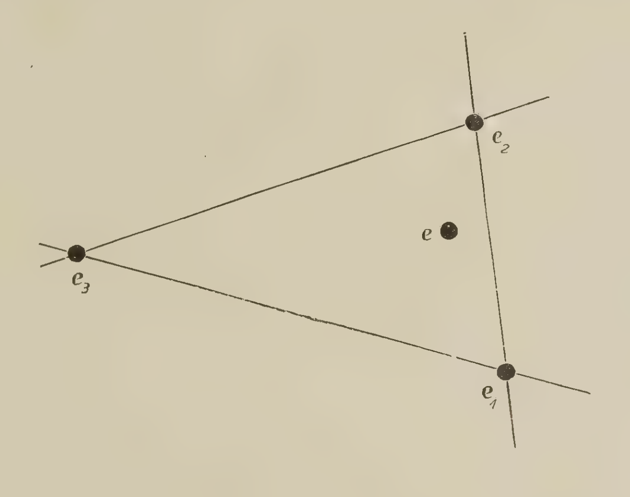


Fig. 67.

Man erhält aber auch hier wieder eine direktere Darstellung dieser Abbildung von Geraden auf Punkte, wenn man neben dem Bruche $\boldsymbol{r}$ einen adjungierten Bruch $\boldsymbol{R}$ einführt, dessen Nenner und Zähler die multiplikativen Kombinationen ohne Wiederholung zur zweiten Klasse aus den Nennern und Zählern des Bruches $\boldsymbol{r}$ sind, das heifst, wenn man setzt

293) . . . . $\boldsymbol{R} = \dfrac{[B_2 B_3],\ [B_3 B_1],\ [B_1 B_2]}{[e_2 e_3],\ \ [e_3 e_1],\ \ [e_1 e_2]}$ oder

294) . . . . $\boldsymbol{R} = \dfrac{b_1,\ b_2,\ b_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$, wo

295) . . . . . . $E_1 = [e_2 e_3],\ E_2 = [e_3 e_1],\ E_3 = [e_1 e_2]$ und

296) . . . . . . $b_1 = [B_2 B_3],\ b_2 = [B_3 B_1],\ b_3 = [B_1 B_2]$

ist (vgl. Fig. 68). Die Zählerpunkte b_i lassen sich hier übrigens leicht als Vielfachensummen der Grundpunkte e_k darstellen. Dazu führe man in die Gleichungen 296) auf den rechten Seiten die Ausdrücke 286) ein und multipliziere aus unter Berücksichtigung der Gleichungen

297) . . . . . . $[E_2 E_3] = e_1,\ [E_3 E_1] = e_2,\ [E_1 E_2] = e_3,$

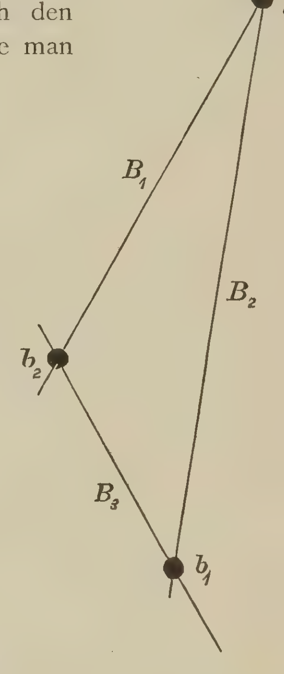
dann erhält man die Gleichungen:

$$298) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} b_1 = \mathfrak{B}_{11} e_1 + \mathfrak{B}_{12} e_2 + \mathfrak{B}_{13} e_3 \\ b_2 = \mathfrak{B}_{21} e_1 + \mathfrak{B}_{22} e_2 + \mathfrak{B}_{23} e_3 \\ b_3 = \mathfrak{B}_{31} e_1 + \mathfrak{B}_{32} e_2 + \mathfrak{B}_{33} e_3, \end{cases}$$

in denen die $\mathfrak{B}_{ik}$ die Unterdeterminanten der Determinante $\mathfrak{b} = |\mathfrak{b}_{ik}|$ sind.

Um jetzt den Nachweis zu erbringen, dafs der Bruch $\boldsymbol{R}$ wirklich die gewünschte Beziehung zwischen den Geraden des ersten und den Punkten des zweiten Systems herstellt, hat man zu zeigen, dafs der Bruch $\boldsymbol{R}$ den Verbindungsstab $[yz]$ zweier beliebigen Punkte y und z in den Schnittpunkt $[y\boldsymbol{r} \cdot z\boldsymbol{r}]$ derjenigen beiden Stäbe $y\boldsymbol{r}$ und $z\boldsymbol{r}$ überführt, welche durch den Bruch $\boldsymbol{r}$ den Punkten y und z zugewiesen werden. Dazu setze man wie gewöhnlich (vgl. Fig. 69)

$$\begin{cases} y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3 \\ z = \mathfrak{z}_1 e_1 + \mathfrak{z}_2 e_2 + \mathfrak{z}_3 e_3; \text{ dann wird} \end{cases}$$



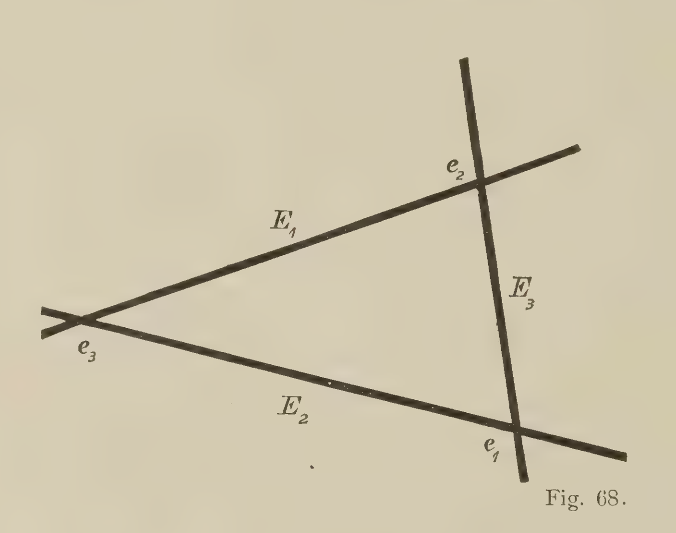


Fig. 68.

$$299) \quad \ldots\ldots \quad [yz] = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} E_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} E_3,$$

also wegen 294)

$$300) \quad \ldots\ldots \quad [yz]\,\boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} b_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} b_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} b_3.$$

Andererseits wird

$$y\boldsymbol{r} = \mathfrak{y}_1 B_1 + \mathfrak{y}_2 B_2 + \mathfrak{y}_3 B_3,$$
$$z\boldsymbol{r} = \mathfrak{z}_1 B_1 + \mathfrak{z}_2 B_2 + \mathfrak{z}_3 B_3,$$

also mit Rücksicht auf 296)

$$301) \quad \ldots \quad [y\boldsymbol{r} \cdot z\boldsymbol{r}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} b_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} b_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} b_3,$$

und es wird daher wirklich

$$302) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [y\boldsymbol{r} \cdot z\boldsymbol{r}] = [yz]\,\boldsymbol{R},$$

das heifst, man hat den Satz:

Der Bruch $\boldsymbol{R}$, der dem Reciprocitätsbruche $\boldsymbol{r}$ adjungiert ist, weist allgemein dem Verbindungsstabe zweier Punkte den Schnittpunkt derjenigen beiden Geraden zu, die diesen beiden Punkten in der Reciprocität $\boldsymbol{r}$ entsprechen.

Es ist ferner von Interesse, die zu 302) dualistische Formel zu entwickeln. Dabei hat man zu beachten, dafs wegen $[e_1 e_2 e_3] = 1$ zwar wie früher

303) . . . . . . $[E_2 E_3] = e_1, \; [E_3 E_1] = e_2, \; [E_1 E_2] = e_3$

wird, dafs aber wegen $[B_1 B_2 B_3] = \mathfrak{b}$, das Produkt

$$[b_2 b_3] = [B_3 B_1 \cdot B_1 B_2] = [B_3 B_1 B_2] B_1 \text{ (vgl. Gleich. 105)}$$
$$= [B_1 B_2 B_3] B_1 = \mathfrak{b} B_1$$

wird, und Entsprechendes gilt für die beiden andern Produkte $[b_3 b_1]$ und $[b_1 b_2]$. Man erhält also die Formeln

304) . . . . . . $[b_2 b_3] = \mathfrak{b} B_1, \; [b_3 b_1] = \mathfrak{b} B_2, \; [b_1 b_2] = \mathfrak{b} B_3.$

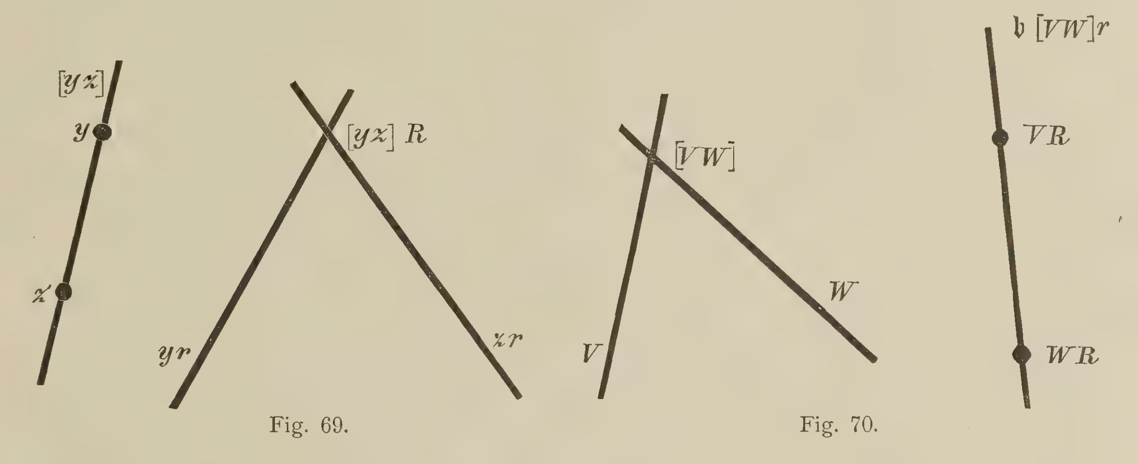


Fig. 69. Fig. 70.

Sind daher V und W zwei beliebige Stäbe, die aus den Grundstäben E_i durch die Zahlgröfsen $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{w}_i$ abgeleitet sind, das heifst, ist

305) . . . . . . $\begin{cases} V = \mathfrak{v}_1 E_1 + \mathfrak{v}_2 E_2 + \mathfrak{v}_3 E_3 \\ W = \mathfrak{w}_1 E_1 + \mathfrak{w}_2 E_2 + \mathfrak{w}_3 E_3, \end{cases}$

so wird

306) . . . . . $[VW] = \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_2 & \mathfrak{v}_3 \\ \mathfrak{w}_2 & \mathfrak{w}_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_3 & \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{w}_3 & \mathfrak{w}_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_2 \\ \mathfrak{w}_1 & \mathfrak{w}_2 \end{vmatrix} e_3,$

also mit Rücksicht auf 289)

307) . . . . $[VW]\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_2 & \mathfrak{v}_3 \\ \mathfrak{w}_2 & \mathfrak{w}_3 \end{vmatrix} B_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_3 & \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{w}_3 & \mathfrak{w}_1 \end{vmatrix} B_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_2 \\ \mathfrak{w}_1 & \mathfrak{w}_2 \end{vmatrix} B_3.$

Andererseits wird

$$\begin{cases} V\boldsymbol{R} = \mathfrak{v}_1 b_1 + \mathfrak{v}_2 b_2 + \mathfrak{v}_3 b_3 \\ W\boldsymbol{R} = \mathfrak{w}_1 b_1 + \mathfrak{w}_2 b_2 + \mathfrak{w}_3 b_3, \end{cases}$$ also wegen 304)

308) . . . $[V\boldsymbol{R} \cdot W\boldsymbol{R}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_2 & \mathfrak{v}_3 \\ \mathfrak{w}_2 & \mathfrak{w}_3 \end{vmatrix} \mathfrak{b} B_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_3 & \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{w}_3 & \mathfrak{w}_1 \end{vmatrix} \mathfrak{b} B_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_2 \\ \mathfrak{w}_1 & \mathfrak{w}_2 \end{vmatrix} \mathfrak{b} B_3.$

Die gesuchte zu 303) dualistische Formel lautet somit

309) . . . . $[V\boldsymbol{R} \cdot W\boldsymbol{R}] = \mathfrak{b}[VW]\boldsymbol{r},$

und man erhält den Satz (vgl. Fig. 70):

Dem Schnittpunkte $[VW]$ zweier Stäbe V und W wird durch den Reciprocitätsbruch $\boldsymbol{r}$ die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte $V\boldsymbol{R}$ und $W\boldsymbol{R}$ zugewiesen, auf welche die Stäbe V und W durch den adjungierten Bruch $\boldsymbol{R}$ abgebildet werden.

Die so gewonnene neue Auffassung der Reciprocität als Stab-Punkt-Zuordnung ergiebt wieder zu jedem Satze über die reciproke Verwandtschaft den dualistisch entsprechenden Satz; insbesondere erhält man die Sätze:

Jeder Strahlwurf wird durch die Reciprocität in einen Punktwurf von gleichem Doppelverhältnis abgebildet,

jedes Strahlbüschel in eine projektive Punktreihe,

jede Kurve zweiter Ordnung in eine Kurve zweiter Klasse.

Die Einführung der Brüche

310) . . . . $\frac{1}{\boldsymbol{r}} = \frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{B_1,\ B_2,\ B_3}$ und 311) . . . . $\frac{1}{\boldsymbol{R}} = \frac{E_1,\ E_2,\ E_3}{b_1,\ b_2,\ b_3}$

für die zur Verwandtschaft $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ inverse Verwandtschaft mufs an die Bedingung geknüpft werden, dafs die beiden äufseren Produkte ihrer drei Nenner von Null verschieden seien.

Denn wäre zum Beispiel das Produkt der drei Nenner des Bruches $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$, das heifst das Produkt $[B_1 B_2 B_3] = 0$, also nach 288) $\mathfrak{b} = 0$, so würde zwischen den Nennern B_i dieses Bruches eine Zahlbeziehung bestehen müssen. Eine solche Zahlbeziehung zwischen den Nennern eines extensiven Bruches, dessen Zähler linear unabhängig sind, widerspricht aber dem Begriffe des extensiven Bruches. Ein solcher Bruch nämlich sollte nach seiner Erklärung *erstens* seinen drei Nennern die drei Zähler zuweisen und *zweitens* bei der Multiplikation mit einer Vielfachensumme aus den drei Nennern distributiv sein. Diese beiden Eigenschaften aber sind nicht mit einander vereinbar, sobald zwischen den Nennern eine Zahlbeziehung herrscht, der nicht die entsprechende Zahlbeziehung zwischen den Zählern zur Seite steht. Aus einer zwischen den Nennern des Bruches $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ obwaltenden Zahlbeziehung

$$B_3 = \mathfrak{g}_1 B_1 + \mathfrak{g}_2 B_2$$

würde nämlich durch Multiplikation mit dem Bruche $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ die Gleichung folgen

$$B_3 \frac{1}{\boldsymbol{r}} = (\mathfrak{g}_1 B_1 + \mathfrak{g}_2 B_2) \frac{1}{\boldsymbol{r}},$$

für die man wegen der Distributivität des Bruches $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ auch schreiben kann

$$B_3 \frac{1}{\boldsymbol{r}} = \mathfrak{g}_1\ B_1 \frac{1}{\boldsymbol{r}} + \mathfrak{g}_2\ B_2 \frac{1}{\boldsymbol{r}} \quad \text{oder wegen 310)}$$

$$e_3 = \mathfrak{g}_1 e_1 + \mathfrak{g}_2 e_2.$$

Jede Zahlbeziehung zwischen den Nennern eines extensiven Bruches zieht also nach dem Begriffe eines solchen Bruches die entsprechende Zahlbeziehung zwischen den

Zählern nach sich. Da nun aber bei den beiden Brüchen 310) und 311) zwischen den Zählern überhaupt keine Zahlbeziehung bestehen kann, insofern ja die beiden Zählerprodukte $[e_1 e_2 e_3]$ und $[E_1 E_2 E_3]$ beide $= 1$, also sicher von Null verschieden sind, so ist der Fall eines verschwindenden Nennerproduktes ganz von der Betrachtung auszuschliefsen.

Von den beiden sich so ergebenden Bedingungen $[B_1 B_2 B_3] \gtrless 0$ und $[b_1 b_2 b_3] \gtrless 0$ ist übrigens jede eine Folge der andern; denn es wird nach 304), 61), 296) und 288)

$$[b_1 b_2 b_3] = \mathfrak{b}[B_3 b_3] = \mathfrak{b}[b_3 B_3] = \mathfrak{b}[B_1 B_2 B_3], \text{ also}$$

$$312) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [b_1 b_2 b_3] = \mathfrak{b}^2 = [B_1 B_2 B_3]^2.$$

Ist aber die für die Existenz der Brüche $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ und $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ erforderliche Bedingung $\mathfrak{b} \gtrless 0$ erfüllt, so sind diese Brüche, wie ihre Form zeigt, ebenso wie die Brüche $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{R}$, Ausdrücke einer gewissen Reciprocität, und zwar ist der Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ der Ausdruck für die zur Verwandtschaft $\boldsymbol{r}$ inverse Stab-Punkt-Zuordnung und der Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ der Ausdruck für die zur Verwandtschaft $\boldsymbol{R}$ inverse Punkt-Stab-Zuordnung. In der That wird die durch den Bruch $\boldsymbol{r}$ bewirkte Abbildung durch den Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ wieder rückgängig gemacht und umgekehrt, und Entsprechendes gilt von den Brüchen $\boldsymbol{R}$ und $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$; das heifst, es bestehen die Gleichungen

$$313) \quad \ldots\ldots \quad x\boldsymbol{r} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{r}} = x \qquad\qquad 314) \quad \ldots\ldots \quad U\frac{1}{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r} = U$$

$$315) \quad \ldots\ldots \quad U\boldsymbol{R}\frac{1}{\boldsymbol{R}} = U \qquad\qquad 316) \quad \ldots\ldots \quad x\frac{1}{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R} = x.$$

Diesen Beziehungen kann man aber noch eine andere Form verleihen. Setzt man nämlich

$$317) \quad \ldots\ldots \quad x\boldsymbol{r} = U, \text{ so nimmt die Gleichung 313) die Form an}$$

$$318) \quad \ldots\ldots \quad x = U\frac{1}{\boldsymbol{r}}, \text{ und man hat den Satz:}$$

Wenn das äufsere Produkt der Zähler von $\boldsymbol{r}$, das heifst das Produkt

$$319) \quad \ldots\ldots \quad [B_1 B_2 B_3] \gtrless 0 \text{ ist oder, was nach 288) dasselbe ist,}$$

$$320) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{b} \gtrless 0 \text{ ist, so ist die Gleichung}$$

$$317) \quad \ldots\ldots \quad x\boldsymbol{r} = U \text{ nach } x \text{ auflösbar und ergiebt für } x \text{ den Wert}$$

$$318) \quad \ldots\ldots \quad x = U\frac{1}{\boldsymbol{r}}.$$

Verschwindet hingegen das äufsere Produkt der drei Zähler von $\boldsymbol{r}$, so verliert der Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ seine Bedeutung. Bei gegebenem U und $\boldsymbol{r}$ wird alsdann durch die Gleichung 317) der Punkt x noch nicht eindeutig bestimmt.

Setzt man andererseits

$$321) \quad \ldots\ldots \quad U\boldsymbol{R} = x, \text{ so verwandelt sich die Gleichung 315) in}$$

$$322) \quad \ldots\ldots \quad U = x\frac{1}{\boldsymbol{R}}, \text{ und man erhält also den Satz:}$$

Wenn das äufsere Produkt der Zähler von $\boldsymbol{R}$, das heifst das Produkt

323) . . . . . . $[b_1 b_2 b_3] \gtrless 0$ ist oder, was nach 312) dasselbe ist,

324) . . . . $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist, so ist die Gleichung

321) . . . . . $U\boldsymbol{R} = x$ nach U auflösbar, und ergiebt für U den Wert

322) . . . . . . $U = x \frac{1}{\boldsymbol{R}}$.

Verschwindet hingegen das äufsere Produkt $[b_1 b_2 b_3]$, so verliert der Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ seine Bedeutung. Bei gegebenem x und $\boldsymbol{R}$ wird alsdann der Stab U durch die Gleichung 321) noch nicht eindeutig bestimmt.

Von den vier Brüchen $\boldsymbol{r}$ und $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$, $\boldsymbol{R}$ und $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ sind daher die beiden ersten und die beiden letzten gleichartige Gröfsen. Der Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ insbesondere hat es mit dem Bruche $\boldsymbol{r}$ gemein, dafs er wie dieser eine Reciprocität darstellt, aufgefafst als Punkt-Stab-Zuordnung. Aber trotzdem sind diese beiden Reciprocitäten *im allgemeinen keineswegs mit einander identisch* oder auch nur bis auf einen Zahlfaktor einander gleich. Dies erkennt man sofort, wenn man die drei Stäbe bestimmt, die durch *den einen* Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{R}} = \frac{E_1, E_2, E_3}{b_1, b_2, b_3}$ den Nennerpunkten e_i *des andern* Bruches $\boldsymbol{r} = \frac{B_1, B_2, B_3}{e_1, e_2, e_3}$ zugewiesen werden, und die Ausdrücke für diese Stäbe mit denen für die Stäbe $e_i\boldsymbol{r} = B_i$ vergleicht, in welche dieselben Punkte e_i durch den Bruch $\boldsymbol{r}$ übergeführt werden, das heifst nach 286) mit den Ausdrücken

325) . . . . $e_i\boldsymbol{r} = \mathfrak{b}_{i1} E_1 + \mathfrak{b}_{i2} E_2 + \mathfrak{b}_{i3} E_3$.

Dazu stelle man zunächst die Nenner e_i des Bruches $\boldsymbol{r}$ als Vielfachensummen der Nenner b_k des Bruches $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ dar. Nach 298) bestehen zwischen den b_k und e_i die Gleichungen

$$b_1 = \mathfrak{B}_{11} e_1 + \mathfrak{B}_{12} e_2 + \mathfrak{B}_{13} e_3$$
$$b_2 = \mathfrak{B}_{21} e_1 + \mathfrak{B}_{22} e_2 + \mathfrak{B}_{23} e_3$$
$$b_3 = \mathfrak{B}_{31} e_1 + \mathfrak{B}_{32} e_2 + \mathfrak{B}_{33} e_3.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen mit den Faktoren $\mathfrak{b}_{1i}$, $\mathfrak{b}_{2i}$, $\mathfrak{b}_{3i}$, addiert und berücksichtigt die aus der Theorie der Determinanten bekannten Gleichungen

326) . . . . $\mathfrak{b}_{1i}\mathfrak{B}_{1i} + \mathfrak{b}_{2i}\mathfrak{B}_{2i} + \mathfrak{b}_{3i}\mathfrak{B}_{3i} = \mathfrak{b}$ und

327) . . . . $\mathfrak{b}_{1i}\mathfrak{B}_{1k} + \mathfrak{b}_{2i}\mathfrak{B}_{2k} + \mathfrak{b}_{3i}\mathfrak{B}_{3k} = 0, \quad i \gtrless k$,

so erhält man

$$\mathfrak{b} e_i = \mathfrak{b}_{1i} b_1 + \mathfrak{b}_{2i} b_2 + \mathfrak{b}_{3i} b_3, \text{ also}$$

328) . . . . $e_i = \frac{1}{\mathfrak{b}} (\mathfrak{b}_{1i} b_1 + \mathfrak{b}_{2i} b_2 + \mathfrak{b}_{3i} b_3)$.

Man bekommt daher für die drei Stäbe, welche durch den Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ den Nennern e_i des Bruches $\boldsymbol{r}$ zugewiesen werden, mit Rücksicht auf 311) die Ausdrücke

329) . . . . $e_i \frac{1}{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{\mathfrak{b}} (\mathfrak{b}_{1i} E_1 + \mathfrak{b}_{2i} E_2 + \mathfrak{b}_{3i} E_3)$,

die sich von den Ausdrücken 325) für die Stäbe $e_i\boldsymbol{r}$ aufser durch den Zahlfaktor $\frac{1}{\mathfrak{b}}$

noch dadurch unterscheiden, dafs die Ableitzahlen in der Klammer gegen die Ableitzahlen der Stäbe $e_i \boldsymbol{r}$ transponiert sind. Die Geraden der Stäbe $e_i \boldsymbol{r}$ und $e_i \frac{1}{\boldsymbol{R}}$ sind daher im allgemeinen von einander verschieden, das heifst, es werden einem jeden von den drei Grundpunkten und somit überhaupt jedem Punkte der Ebene im allgemeinen *zwei auch ihrer Lage nach verschiedene* Stäbe zugeordnet sein, je nachdem man jenen Punkt als Punkt des ersten oder des zweiten Systems auffafst und also zu seiner Abbildung den Bruch $\boldsymbol{r}$ oder den Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ verwendet.

Insbesondere werden auch jedem *unendlich fernen* Punkte der Ebene im allgemeinen zwei verschiedene Stäbe entsprechen, und diese Stäbe gruppieren sich, falls man sämtliche unendlich fernen Punkte abbildet, zu zwei Strahlbüscheln. Wie schon oben bei der Kollineation gezeigt wurde, lassen sich nämlich die unendlich fernen Punkte, das heifst die Strecken g der Ebene, sämtlich aus zwei Grundstrecken, etwa aus den Strecken

330) . . . . $g_1 = \frac{e_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3}, \quad g_2 = \frac{e_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3},$

numerisch ableiten, also unter der Form

331) . . . . $g = \mathfrak{g}_1 g_1 + \mathfrak{g}_2 g_2$

darstellen. Fafst man diese Strecken als Elemente des ersten Systems auf, so werden sie durch den Bruch $\boldsymbol{r}$ in die Stäbe

332) . . . . $g\boldsymbol{r} = \mathfrak{g}_1 \; g_1\boldsymbol{r} + \mathfrak{g}_2 \; g_2\boldsymbol{r}$

übergeführt. Den unendlich fernen Punkten (den Strecken) des ersten Systems entsprechen daher wirklich die Stäbe eines Strahlbüschels. Der Scheitel dieses Strahlbüschels, das heifst der Punkt

333) . . . . $t = [g_1\boldsymbol{r} \cdot g_2\boldsymbol{r}]$

möge der Mittelpunkt des zweiten Systems genannt werden.

Betrachtet man dagegen die unendlich fernen Punkte, das heifst die Strecken g der Ebene, als Elemente des zweiten Systems, bezeichnet sie als solche mit dem Buchstaben h und benutzt als Grundstrecken dieses Systems die Strecken

334) . . . . $h_1 = \frac{b_1}{\mathfrak{n}_1} - \frac{b_3}{\mathfrak{n}_3}, \quad h_2 = \frac{b_2}{\mathfrak{n}_2} - \frac{b_3}{\mathfrak{n}_3},$

wo die Nenner $\mathfrak{n}_i$ die Massen der Punkte b_i bezeichnen, so wird

335) . . . . $h = \mathfrak{h}_1 h_1 + \mathfrak{h}_2 h_2.$

Für die Stäbe des ersten Systems, welche diesen Strecken h entsprechen, bekommt man also die Darstellung

336) . . . . $h\frac{1}{\boldsymbol{R}} = \mathfrak{h}_1 \; h_1\frac{1}{\boldsymbol{R}} + \mathfrak{h}_2 \; h_2\frac{1}{\boldsymbol{R}},$

aus der für den Scheitel des von ihnen beschriebenen Strahlbüschels, das heifst für den Mittelpunkt s des ersten Systems, der Wert hervorgeht

337) . . . . $s = \left[h_1\frac{1}{\boldsymbol{R}} \cdot h_2\frac{1}{\boldsymbol{R}}\right].$

Nebenbei entnimmt man noch aus der Thatsache, dafs die Reciprocitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ die unendlich fernen Punkte der Ebene in Stäbe eines Strahlbüschels überführen, also

in derselben Weise umwandeln wie die Punkte einer Geraden, dafs es auch bei der Betrachtung reciproker Systeme vorteilhaft sein wird, sich die unendlich fernen Elemente auf einer Geraden vereinigt zu denken und ebenso wie bei der kollinearen Verwandtschaft von der *unendlich fernen Geraden der Ebene* zu sprechen.

Übrigens lassen sich die beiden Mittelpunkte s und t der beiden Systeme auch leicht als Vielfachensummen der Grundpunkte darstellen. Für die den Strecken g_1 und g_2 des ersten Systems zugeordneten Stäbe $g_1\boldsymbol{r}$ und $g_2\boldsymbol{r}$ ergeben sich nämlich aus 330) und 289) die Werte

$$338) \quad \ldots\ldots \quad g_1\boldsymbol{r} = \frac{B_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{B_3}{\mathfrak{m}_3}, \quad g_2\boldsymbol{r} = \frac{B_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{B_3}{\mathfrak{m}_3}.$$

Man erhält also für den Mittelpunkt des zweiten Systems nach 333) die Darstellung

$$339) \quad \ldots \quad t = \left[\left(\frac{B_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{B_3}{\mathfrak{m}_3}\right)\left(\frac{B_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{B_3}{\mathfrak{m}_3}\right)\right] = \frac{[B_2B_3]}{\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3} + \frac{[B_3B_1]}{\mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1} + \frac{[B_1B_2]}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}$$

oder wegen 296)

$$340) \quad \ldots\ldots \quad t = \frac{\mathfrak{m}\, b_1 + \mathfrak{m}_2 b_2 + \mathfrak{m}_3 b_3}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3}.$$

Entsprechend findet man für den Mittelpunkt s des ersten Systems den Ausdruck

$$341) \quad \ldots\ldots \quad s = \frac{\mathfrak{n}_1 e_1 + \mathfrak{n}_2 e_2 + \mathfrak{n}_3 e_3}{\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2\mathfrak{n}_3},$$

in dem die Zahlgröfsen $\mathfrak{n}_i$ die Massen der Punkte b_i bedeuten. Aus der allgemeinen Massenformel 181) folgen daher für sie mit Rücksicht auf 298) die Werte

$$342) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{n}_i = \mathfrak{B}_{i1}\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{B}_{i2}\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{B}_{i3}\mathfrak{m}_3.$$

Neunter Abschnitt.

Das Polarsystem.

Die Beziehung zwischen den beiden Ausdrücken 325) und 329) für die den Grundpunkten e_i im zweiten und ersten System zugeordneten Geraden tritt noch etwas deutlicher hervor, wenn man anstatt des Bruches $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ den von ihm nur um den konstanten Zahlfaktor $\mathfrak{b}$ verschiedenen Bruch $\frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}}$ verwendet, der ja geometrisch dieselbe Reciprocität definiert wie der Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$, nur dafs alle Stäbe gegen die entsprechenden Stäbe der Verwandtschaft $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ noch mit einem konstanten Zahlfaktor $\mathfrak{b}$ multipliziert erscheinen. Für diesen Bruch gelten die Gleichungen

$$343) \quad \ldots\ldots \quad e_i\frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}} = \mathfrak{b}_{1i}E_1 + \mathfrak{b}_{2i}E_2 + \mathfrak{b}_{3i}E_3.$$

Die Ausdrücke für die so gewonnenen Stäbe $e_i\frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}}$ unterscheiden sich daher von den für die Stäbe $e_i\boldsymbol{r}$ in 325) angegebenen Werten nur noch dadurch, dafs ihre Ableitzahlen gegen die der Stäbe $e_i\boldsymbol{r}$ transponiert sind. Sollte daher allgemein für jeden Wert von i und k

$$344) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$$

sein, so werden die beiden Ausdrücke 325) und 343) identisch, das heifst, es wird

345) . . . . $e_i \boldsymbol{r} = e_i \dfrac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}} \quad i = 1, 2, 3;$

und somit wird auch allgemein für jeden beliebigen Punkt x

346) . . . . $x\boldsymbol{r} = x\dfrac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}}.$

Man kann daher auch die Brüche $\boldsymbol{r}$ und $\dfrac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}}$ selbst einander gleich setzen und erhält so die Gleichung

347) . . . . $\boldsymbol{r} = \dfrac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}}$ und damit den Satz:

Eine reciproke Verwandtschaft $\boldsymbol{r}$, deren Ableitzahlen den drei Bedingungen $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$ Genüge leisten, stimmt bis auf einen Zahlfaktor $\mathfrak{b}$ mit dem reciproken Werte der adjungierten Verwandtschaft $\boldsymbol{R}$ überein.

Diesem Ergebnis kann man noch eine andere Fassung geben. Multipliziert man nämlich die Gleichung 346) mit $\boldsymbol{R}$, so erhält man

$$x\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{R} = x\frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}$$

oder mit Rücksicht auf 316)

348) . . . . $x\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{R} = \mathfrak{b}x.$

Diese Gleichung besagt:

Eine reciproke Verwandtschaft $\boldsymbol{r}$, deren Ableitzahlen den drei Bedingungen $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$ genügen, hat die Eigenschaft, dafs jeder Stab $x\boldsymbol{r}$, der aus einem beliebigen Punkte x vermöge der Verwandtschaft $\boldsymbol{r}$ hervorgeht, durch die adjungierte Verwandtschaft $\boldsymbol{R}$ in den mit dem Punkte x kongruenten Punkt $\mathfrak{b}x$ übergeführt wird.

Wegen dieser Eigenschaft nennt man eine reciproke Verwandtschaft, deren Ableitzahlen den Gleichungen $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$ genügen, involutorisch und benutzt für eine solche involutorische Reciprocität noch den besonderen Namen „Polarreciprocität". Ferner sagt man von den beiden Systemen, die einander durch eine Polarreciprocität zugewiesen werden, sie bilden zusammen ein Polarsystem. Auch bezeichnet man wohl die *Verwandtschaft selbst* als ein Polarsystem. Zur Unterscheidung von der allgemeinen Reciprocität $\boldsymbol{r}$, wollen wir für den Verwandtschaftsbruch eines solchen Polarsystems den besonderen Buchstaben $\boldsymbol{p}$ einführen und für den adjungierten Bruch den Buchstaben $\boldsymbol{P}$.

Man nennt ferner die einem beliebigen Punkte x in einem Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ zugeordnete Gerade $x\boldsymbol{p}$ die Polare des Punktes x in dem Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ und umgekehrt den einer beliebigen Geraden U zugeordneten Punkt $U\boldsymbol{P}$ den Pol der Geraden U in dem Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$.

Die Brüche $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{P}$ für das Polarsystem genügen zunächst selbstverständlich allen denjenigen Formeln, die oben für eine *beliebige* Reciprocität entwickelt sind. Der Übersicht wegen seien sie hier unter Benutzung der neuen Bezeichnung noch einmal zusammen gestellt. Es sind die Formeln:

349) . . . $\boldsymbol{p} = \dfrac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3},$ 350) . . . $\boldsymbol{P} = \dfrac{b_1,\ b_2,\ b_3}{E_1,\ E_2,\ E_3},$

351) . . $e_i\boldsymbol{p} = B_i,$ 352) . . $E_i\boldsymbol{P} = b_i,$

353) . . . $\frac{1}{p} = \frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{B_1,\ B_2,\ B_3}$, 354) . . . $\frac{1}{P} = \frac{E_1,\ E_2,\ E_3}{b_1,\ b_2,\ b_3}$,

355) . . $B_i \frac{1}{p} = e_i$, 356) . . $b_i \frac{1}{P} = E_i$,

357) . . . . . $E_1 = [e_2 e_3],\quad E_2 = [e_3 e_1],\quad E_3 = [e_1 e_2]$,

358) . . . . . $b_1 = [B_2 B_3],\quad b_2 = [B_3 B_1],\quad b_3 = [B_1 B_2]$,

359) . . $[e_1 e_2 e_3] = 1$, 360) . . $[E_1 E_2 E_3] = 1$,

361) . . $[e_i E_i] = [E_i e_i] = 1$, 362) . . $[e_i E_k] = [E_k e_i] = 0,\quad i \gtrless k$,

363) . . . . $B_i = \mathfrak{b}_{i1} E_1 + \mathfrak{b}_{i2} E_2 + \mathfrak{b}_{i3} E_3$,

364) . . . . $b_i = \mathfrak{B}_{i1} e_1 + \mathfrak{B}_{i2} e_2 + \mathfrak{B}_{i3} e_3$,

wo die $\mathfrak{B}_{ik}$ die Unterdeterminanten der Determinante

$$\mathfrak{b} = |\mathfrak{b}_{ik}| \quad \text{sind.}$$

365) . . $[B_1 B_2 B_3] = |\mathfrak{b}_{ik}| = \mathfrak{b}$, 366) . . $[b_1 b_2 b_3] = |\mathfrak{B}_{ik}| = \mathfrak{b}^2$,

367) . . . . . $[E_2 E_3] = e_1,\quad [E_3 E_1] = e_2,\quad [E_1 E_2] = e_3$,

368) . . . . . $[b_2 b_3] = \mathfrak{b} B_1,\quad [b_3 b_1] = \mathfrak{b} B_2,\quad [b_1 b_2] = \mathfrak{b} B_3$.

Aus den letzten Gleichungen folgt noch, dafs *der adjungierte Bruch des adjungierten Bruches* P, das heifst der Bruch

369) . . . . $\bar{p} = \frac{[b_2\ b_3],\ [b_3\ b_1],\ [b_1\ b_2]}{[E_2 E_3],\ [E_3 E_1],\ [E_1 E_2]}$,

sich von dem ursprünglichen Bruche p (vgl. Gl. 349) im Allgemeinen (so lange nämlich $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist) nicht wesentlich unterscheidet; denn er läfst sich auch in der Form schreiben

370) . . . . $\bar{p} = \mathfrak{b} \frac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$,

und es wird also

371) . . . . $\bar{p} = \mathfrak{b} p$.

Weiter wird:

372) . . $[yp \cdot zp] = [yz] P$, 373) . $[VP \cdot WP] = \mathfrak{b} [VW] p$,

374) . . $xp \cdot \frac{1}{p} = x$, 375) . . $U \frac{1}{p} \cdot p = U$,

376) . . $UP \cdot \frac{1}{P} = U$, 377) . . $x \frac{1}{P} \cdot P = x$.

Wenn ferner

378) . . . . $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist, so ist die Gleichung

379) . . . . $xp = U$

nach x auflösbar und ergiebt für x den Wert

380) . . . . $x = U \frac{1}{p}$,

und andererseits ist unter derselben Bedingung die Gleichung

381) . . . . $UP = x$

nach U auflösbar und liefert für U den Wert

382) . . . . $U = x \frac{1}{P}$.

Zu diesen Formeln, welche sämtlich auch noch für jede beliebige Reciprocität gelten, treten nun weiter diejenigen Formeln hinzu, *die dem Polarsystem eigentümlich sind,* also zunächst die Bedingungsgleichungen des Polarsystems

383) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$, aus denen noch folgt, dafs auch

384) . . . . $\mathfrak{B}_{ik} = \mathfrak{B}_{ki}$

ist. Ferner die oben aus 383) abgeleitete Formel

385) . . $\boldsymbol{p} = \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{P}}$, für die man auch schreiben kann 386) $\boldsymbol{P} = \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{p}}$ oder

387) . . $\frac{1}{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{p}}{\mathfrak{b}}$ und 388) $\frac{1}{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{P}}{\mathfrak{b}}$.

Endlich die Formeln, die den involutorischen Charakter des Polarsystems ausdrücken, nämlich die Formel

389) . . . . $x\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{P} = \mathfrak{b}x$,

und andererseits die aus 375) und 388) entspringende Formel

390) . . . . $U\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{p} = \mathfrak{b}\,U$.

Von diesen beiden Formeln zeigt nämlich die erste: Wenn U die Polare von x, also $U = x\boldsymbol{p}$ ist, so ist zugleich x der Pol von U; denn es ist ja zufolge 389) dann $U\boldsymbol{P} = \mathfrak{b}x$. Und umgekehrt zeigt die zweite Formel (390): Wenn x der Pol von U, also $x = U\boldsymbol{P}$ ist, so ist zugleich U die Polare von x; denn es ist ja nach 390) dann $x\boldsymbol{p} = \mathfrak{b}U$.

Man kann übrigens den Bedingungsgleichungen 383) des Polarsystems durch Einführung der Grundpunkte e_i und ihrer Polaren B_i noch eine andere Form geben, die für geometrische Folgerungen vielfach geeigneter ist. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 363), 361) und 362) wird nämlich

391) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = [e_k B_i]$ oder wegen 351)

392) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = [e_k \cdot e_i\boldsymbol{p}]$.

Die Bedingungsgleichungen 383) verwandeln sich daher in die Gleichungen

393) . . . . $[e_k \cdot e_i\boldsymbol{p}] = [e_i \cdot e_k\boldsymbol{p}]$.

Diese Gleichungen, welche eine Beziehung zwischen je zwei Grundpunkten e_i und e_k und ihren Polaren $e_i\boldsymbol{p}$ und $e_k\boldsymbol{p}$ enthalten, sind um so wichtiger, als sich aus ihnen die entsprechende Beziehung für irgend zwei beliebige Punkte y und z und ihre Polaren $y\boldsymbol{p}$ und $z\boldsymbol{p}$ ableiten läfst. Dazu führe man in den Ausdruck $[z \cdot y\boldsymbol{p}]$ für die Punkte z und y ihre Ableitausdrücke

$$z = \sum_1^3{}^i \mathfrak{z}_i e_i \quad \text{und} \quad y = \sum_1^3{}^k \mathfrak{y}_k e_k \quad \text{ein und bekommt so}$$

$$\begin{aligned}
[z \cdot y\boldsymbol{p}] &= \left[\left(\sum_1^3{}^i \mathfrak{z}_i e_i\right) \cdot \left(\sum_1^3{}^k \mathfrak{y}_k e_k\right)\boldsymbol{p}\right] \\
&= \left[\left(\sum_1^3{}^i \mathfrak{z}_i e_i\right) \cdot \left(\sum_1^3{}^k \mathfrak{y}_k e_k\boldsymbol{p}\right)\right] \\
&= \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k \mathfrak{z}_i\mathfrak{y}_k [e_i \cdot e_k\boldsymbol{p}], \quad \text{das heifst wegen 393)} \\
&= \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k \mathfrak{z}_i\mathfrak{y}_k [e_k \cdot e_i\boldsymbol{p}] \\
&= \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^i \mathfrak{y}_k\mathfrak{z}_i [e_k \cdot e_i\boldsymbol{p}] \\
&= [y \cdot z\boldsymbol{p}].
\end{aligned}$$

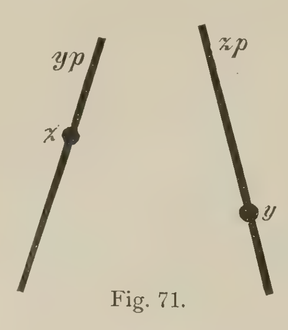


Fig. 71.

Es besteht also wirklich für beliebige Punkte y und z die Gleichung

394) . . . . . $[z \cdot y\boldsymbol{p}] = [y \cdot z\boldsymbol{p}]$;

sie möge die erste Grundgleichung des Polarsystems heifsen. Aus ihr folgt insbesondere, dafs mit der Gleichung

$[z \cdot y\boldsymbol{p}] = 0$ stets die Gleichung $[y \cdot z\boldsymbol{p}] = 0$

verknüpft ist, und damit der Satz:

Wenn z auf der Polare eines Punktes y liegt, so liegt auch y auf der Polare des Punktes z (vgl. Fig. 71).

Eine andere geometrische Folgerung ergiebt sich aus den Definitionsgleichungen des Polarsystems

383) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$,

Fig. 72.

wenn man nach den Beziehungen fragt, die zwischen den Zähler- und Nenner-Dreiecken des Bruches $\boldsymbol{p}$ (also auch des adjungierten Bruches $\boldsymbol{P}$) herrschen (vgl. Fig. 72). Dazu

bestimme man die Schnittpunkte der Stäbe E_i und B_i von gleichem Index und erhält

$$[E_1 B_1] = \mathfrak{b}_{12}[E_1 E_2] + \mathfrak{b}_{13}[E_1 E_3]$$

oder wegen 88) und 367)

$$395) \quad \begin{cases} [E_1 B_1] = \mathfrak{b}_{12} e_3 - \mathfrak{b}_{13} e_2 \quad \text{und entsprechend} \\ [E_2 B_2] = \mathfrak{b}_{23} e_1 - \mathfrak{b}_{21} e_3 \\ [E_3 B_3] = \mathfrak{b}_{31} e_2 - \mathfrak{b}_{32} e_1 . \end{cases}$$

Die Addition dieser Gleichungen aber liefert mit Berücksichtigung der Definitionsgleichungen des Polarsystems (383) die Gleichung

$$396) \quad [E_1 B_1] + [E_2 B_2] + [E_3 B_3] = 0 .$$

Zwischen den drei Schnittpunkten $[E_i B_i]$ der drei Paare entsprechender Seiten der beiden Nenner- und Zähler-Dreiecke $e_1 e_2 e_3$ und $b_1 b_2 b_3$ besteht also eine *besonders einfache* Zahlbeziehung. Aber schon aus der Thatsache, dafs zwischen den drei Punkten $[E_i B_i]$ *überhaupt* eine Zahlbeziehung herrscht, folgt der Satz:

Die Schnittpunkte der drei Paare entsprechender Seiten des Nenner- und Zähler-Dreiecks eines Polarsystems $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ liegen auf *einer* Geraden.

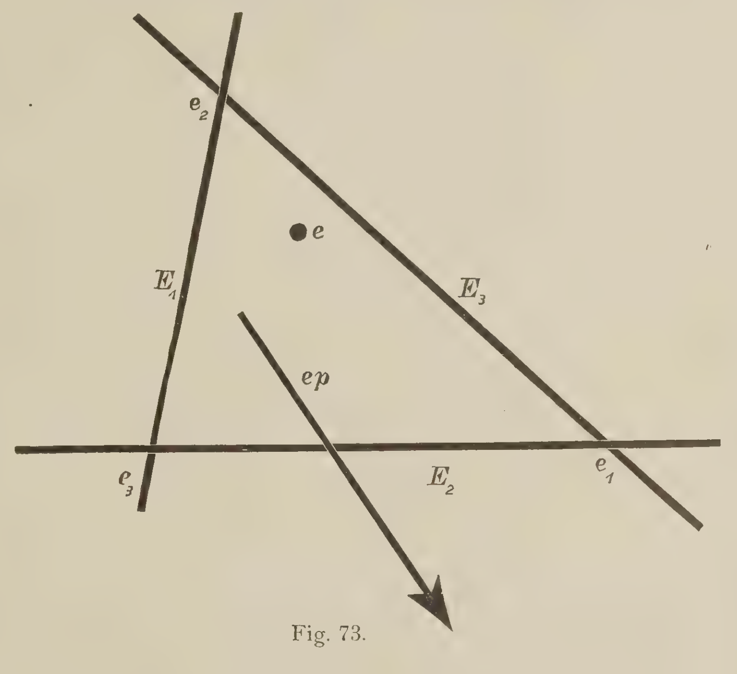


Fig. 73.

Und aus dieser Eigenschaft folgt bekanntlich nach dem Satze von Desargues die andere:

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken beider Dreiecke schneiden sich in *einem* Punkte.

Sie ergiebt sich übrigens auch *direkt* analytisch, wenn man durch Multiplikation der Gleichungen 364) mit e_i die zu 395) dualistischen Ausdrücke bildet:

$$397) \quad \begin{cases} [e_1 b_1] = \mathfrak{B}_{12} E_3 - \mathfrak{B}_{13} E_2 \\ [e_2 b_2] = \mathfrak{B}_{23} E_1 - \mathfrak{B}_{21} E_3 \\ [e_3 b_3] = \mathfrak{B}_{31} E_2 - \mathfrak{B}_{32} E_1 , \end{cases}$$

sodann wieder diese Ausdrücke addiert und dabei die Gleichungen $\mathfrak{B}_{ik} = \mathfrak{B}_{ki}$ berücksichtigt. Auf diese Weise erhält man die zu 396) dualistische Gleichung

$$398) \quad [e_1 b_1] + [e_2 b_2] + [e_3 b_3] = 0 ,$$

welche die genannte Eigenschaft ausspricht.

Nennt man noch zwei Dreiecke, die zu einander in der durch die beiden letzten Sätze ausgedrückten Beziehung stehen, zu einander perspektiv, so kann man die beiden gewonnenen Ergebnisse auch in den Satz zusammenfassen:

Das Nenner-Dreieck eines Polarsystems ist zu seinem Zähler-Dreieck perspektiv.

Dieselbe Eigenschaft teilen übrigens wegen der Gleichung 394) auch je zwei beliebige Dreiecke, die einander durch das Polarsystem zugewiesen werden.

Man wird den Bedingungsgleichungen des Polarsystems $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$ ganz sicher gerecht, wenn man die Koeffizienten

399) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = 0$ wählt für je zwei verschiedene Werte der Indices i und k, die Koeffizienten mit gleichen Indices aber, das heifst die Gröfsen $\mathfrak{b}_{ii}$, willkürlich läfst (vgl. Fig. 73). Dann verwandeln sich die Gleichungen 363) in

400) . . . $B_i = \mathfrak{b}_{ii} E_i$,

und der Bruch p nimmt daher die Gestalt an

401) $$p = \frac{\mathfrak{b}_{11} E_1,\ \mathfrak{b}_{22} E_2,\ \mathfrak{b}_{33} E_3}{e_1,\quad e_2,\quad e_3},$$

welche zeigt, dafs er den Ecken des Fundamentaldreiecks deren Gegenseiten als Polaren zuweist, aufserdem aber dem Einheitspunkte

402) . . $e = e_1 + e_2 + e_3$

den Stab

403) $ep = \mathfrak{b}_{11} E_1 + \mathfrak{b}_{22} E_2 + \mathfrak{b}_{33} E_3$,

das heifst mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit der $\mathfrak{b}_{ii}$, einen ganz beliebigen Stab der Ebene.

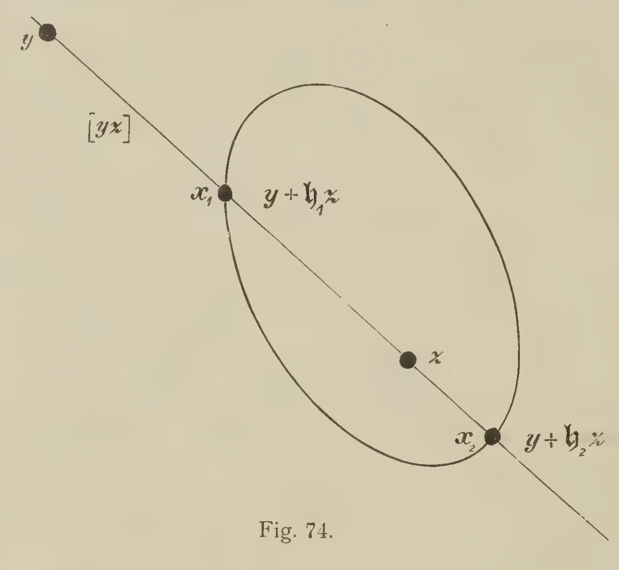


Fig. 74.

Bezeichnet man noch ein Dreieck, dessen Seiten die Polaren der gegenüberliegenden Ecken hinsichtlich eines Polarsystems bilden, als ein Polardreieck des Polarsystems, so läfst sich das gewonnene Ergebnis in dem Satze aussprechen:

Um ein Polarsystem festzulegen, kann man ein Polardreieck des Systems willkürlich annehmen und aufserdem noch einem beliebigen vierten Punkte eine beliebige Gerade als Polare zuweisen. Dadurch ist dann das Polarsystem bis auf einen konstanten Faktor, von dem die Länge der Stäbe abhängt, eindeutig bestimmt.

An die Stelle der Frage nach den Doppelelementen, welche bei den kollinearen Systemen hervortrat, stellt sich bei der reciproken Verwandtschaft und insbesondere auch bei dem Polarsystem die Frage nach denjenigen Punkten, die auf ihren zugeordneten Geraden liegen. Dieser Forderung aber entsprechen hier nicht nur einzelne diskrete Punkte, sondern die sämtlichen Punkte einer Kurve. Diese Kurve heifst die Polkurve der Verwandtschaft.

Man versteht also insbesondere unter der Polkurve eines Polarsystems den geometrischen Ort derjenigen Punkte x der Ebene, die auf ihren Polaren $x\mathfrak{p}$ liegen. Diese Erklärung liefert sofort die *Gleichung* der Polkurve eines Polarsystems; denn diese hat ja nur auszudrücken, dafs das äufsere Produkt aus dem Punkte x und seiner Polare $x\mathfrak{p}$ verschwindet. Die Gleichung der Polkurve lautet also

404) . . . . $[x \cdot x\mathfrak{p}] = 0$

und stellt, wie man schon aus ihrer Form entnehmen kann, eine Kurve zweiter Ordnung dar. In der That wird die Kurve 404) von einer jeden Geraden $[yz]$ in zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten (vgl. Fig. 74). Substituiert man nämlich in die Gleichung 404) für x den Ausdruck $y + \mathfrak{y}z$ für den laufenden Punkt der Geraden $[yz]$, so erhält man für den Parameter $\mathfrak{y}$ ihres Schnittpunktes mit der Kurve die Gleichung

405) . . . . $[(y + \mathfrak{y}z) \cdot (y + \mathfrak{y}z)\mathfrak{p}] = 0$ oder

406) . . . . $[y \cdot y\mathfrak{p}] + \mathfrak{y}([z \cdot y\mathfrak{p}] + [y \cdot z\mathfrak{p}]) + \mathfrak{y}^2 [z \cdot z\mathfrak{p}] = 0$,

die man mit Rücksicht auf die erste Grundgleichung des Polarsystems

394) . . . . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = [y \cdot z\mathfrak{p}]$ auch in der Form schreiben kann

407) . . . . . . $[y \cdot y\mathfrak{p}] + 2\mathfrak{y}[z \cdot y\mathfrak{p}] + \mathfrak{y}^2 [z \cdot z\mathfrak{p}] = 0$.

Diese in $\mathfrak{y}$ quadratische Gleichung liefert für den Parameter $\mathfrak{y}$ die beiden Werte

408) . . . . $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{y}_1\\ \mathfrak{y}_2\end{matrix}\right\} = \frac{-[z \cdot y\mathfrak{p}] \pm \sqrt{[z \cdot y\mathfrak{p}]^2 - [y \cdot y\mathfrak{p}]\,[z \cdot z\mathfrak{p}]}}{[z \cdot z\mathfrak{p}]}$.

Die Kurve wird also in der That von einer jeden Geraden $[yz]$ in zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten, nämlich in den Punkten

409) . . . . . . $x_1 = y + \mathfrak{y}_1 z$ und $x_2 = y + \mathfrak{y}_2 z$,

und ist somit eine Kurve zweiter Ordnung, das heifst, man hat den Satz:

Die Polkurve eines Polarsystems ist eine Kurve zweiter Ordnung.

Die Polkurve gewinnt für das Polarsystem dadurch noch eine besondere Bedeutung, dafs sie eine anschauliche Darstellung der Beziehung zwischen dem Pol und der Polare eines Polarsystems ermöglicht. Um diese zu finden, denke man sich in der Gleichung 407) etwa den Punkt y fest gegeben, den Punkt z aber in der Ebene beweglich und frage nach denjenigen Punkten z der Ebene, die von dem Punkte y durch die Polkurve harmonisch getrennt werden (vgl. Fig. 75). Dazu hat man die Bedingung aufzustellen, der die Punkte z genügen

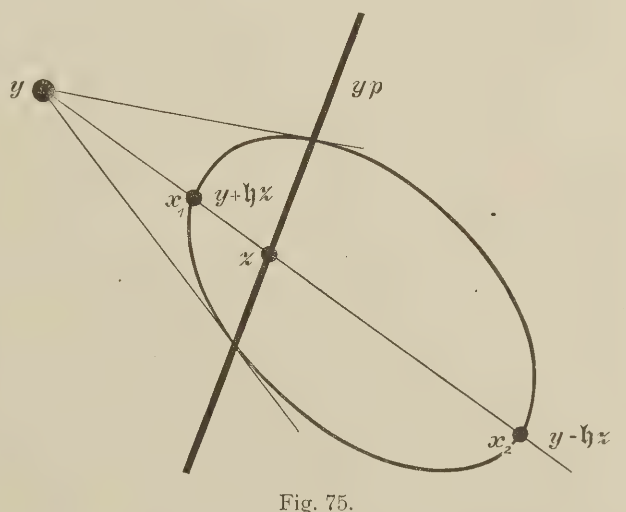


Fig. 75.

müssen, damit die Gleichung 407) für den Parameter $\mathfrak{y}$ zwei entgegengesetzt gleiche Werte $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_2 = -\mathfrak{y}$ liefere, damit sich also für die Schnittpunkte x_1 und x_2 der Geraden $[yz]$ mit der Kurve zwei Werte von der Form

410) . . . . $x_1 = y + \mathfrak{y}z$ und $x_2 = y - \mathfrak{y}z$

ergeben. Man findet diese Bedingung, wenn man den Koeffizienten von $\mathfrak{y}$ in der Gleichung 407) gleich Null setzt, und erhält so für die Punkte z, welche vom Punkte y harmonisch getrennt werden, die Gleichung

411) . . . . $[z \cdot y\boldsymbol{p}] = 0$.

Diese Gleichung sagt aus:

Alle Punkte z, welche von einem gegebenen Punkte y durch die Polkurve eines Polarsystems $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ harmonisch getrennt werden, liegen auf einer Geraden, nämlich auf der Polare $y\boldsymbol{p}$ des Punktes y in Bezug auf das Polarsystem.

Die Polare $y\boldsymbol{p}$ eines beliebigen Punktes y in Bezug auf ein Polarsystem ist also *identisch mit der gewöhnlichen Kegelschnittspolare* jenes Punktes in Bezug auf die Polkurve des Polarsystems. Insbesondere sind die drei Zählerstäbe $B_i = e_i\boldsymbol{p}$ des Bruches $\boldsymbol{p}$, welche den Nennerpunkten e_i durch das Polarsystem zugeordnet werden, die Kegelschnittspolaren der Grundpunkte e_i in Bezug auf die Polkurve des Polarsystems.

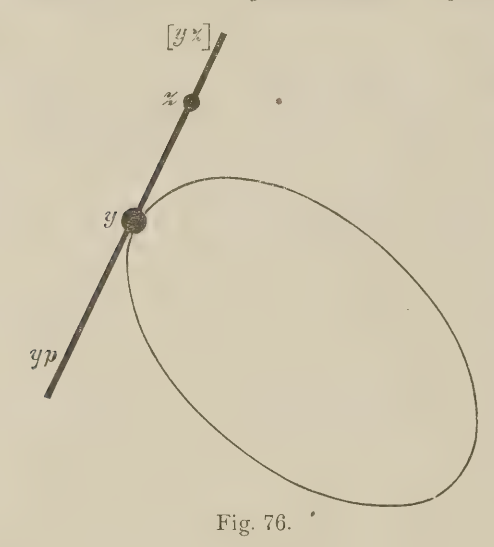


Fig. 76.

Doch hat die oben gegebene Definition der Polare eines Punktes *durch ein Polarsystem* insofern einen Vorzug vor der Erklärung *durch einen Kegelschnitt,* als bei Zugrundelegung des Polarsystems die Polare auch dann noch aus reellen Elementen konstruierbar bleibt, wenn der Kegelschnitt, das heifst die Polkurve des Polarsystems, imaginär wird.

Eine besondere Besprechung erfordert noch der Fall, wo der Punkt y, dessen Polare $y\boldsymbol{p}$ zufolge der Gleichung 411) von dem Punkte z beschrieben wird, selbst auf der Polkurve $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0$ gelegen ist, also der Gleichung

412) . . . . $[y \cdot y\boldsymbol{p}] = 0$

genügt (vgl. Fig. 76).

In diesem Falle liegt der Punkt y, wie die Gleichung 412) zeigt, auf seiner Polare $y\boldsymbol{p}$, was übrigens auch aus dem *Begriffe der Polkurve* hervorgeht. Die oben betrachtete Gerade $[yz]$, welche einen beliebigen Punkt z der Polare $y\boldsymbol{p}$ mit y verbindet, ist daher identisch mit der Polare $y\boldsymbol{p}$ des Punktes y. Aus der Voraussetzung, nach welcher der Punkt y ein Punkt der Polkurve ist, folgt aber weiter, dafs von den beiden Schnittpunkten $x_1 = y + \mathfrak{y}_1 z$ und $x_2 = y + \mathfrak{y}_2 z$ der Geraden $[yz]$ und der Polkurve sicher der eine, sagen wir der Punkt $x_1 = y + \mathfrak{y}_1 z$, mit dem Punkte y zusammenfällt, und es wird somit $\mathfrak{y}_1 = 0$; und, da wegen 411) überdies $\mathfrak{y}_2 = -\mathfrak{y}_1$ ist, so wird auch $\mathfrak{y}_2 = 0$, das heifst, auch der zweite Schnittpunkt x_2 der Geraden $[yz]$ und der Polkurve fällt mit y zusammen. Die Gerade $[yz]$ oder, was nach Obigem dasselbe ist, die Gerade $y\boldsymbol{p}$ hat also mit der Polkurve die beiden in den Punkt y zusammenfallenden Punkte x_1 und x_2 gemein; sie ist somit eine Tangente der Kurve, und der Punkt y ihr Berührungspunkt. Man hat daher den Satz:

Die Polare eines Punktes der Polkurve eines Polarsystems ist die Tangente der Kurve in diesem Punkte.

Nennt man noch zwei Punkte y und z eines Polarsystems, von denen jeder auf der Polare des andern liegt (vgl. S. 90), hinsichtlich des Polarsystems konjugiert, so kann man die Gleichung

411) . . . . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$

oder die gleichwertige Gleichung

413) . . . . $[y \cdot z\mathfrak{p}] = 0$

als die Bedingung des Konjugiertseins der Punkte y und z hinsichtlich des Polarsystems $\mathfrak{p}$ bezeichnen.

Läfst man dann den Punkt y eine feste Gerade beschreiben, von der ein beliebiger Stab mit G bezeichnet sein mag (vgl. Fig. 77), und bestimmt zu jeder Lage des

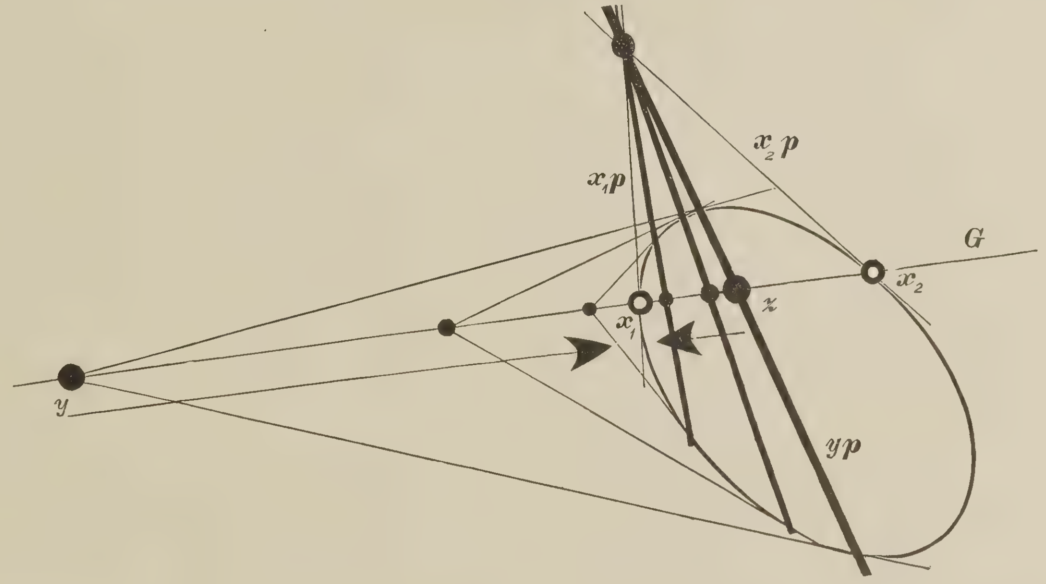


Fig. 77.

Punktes y den auf *derselben Geraden* G liegenden konjugierten Punkt z, so erhält man auf ihr *zwei projektive Punktreihen von besonderer Art.* In der That sind zunächst die beiden Punktreihen der Punkte y und z *projektiv*; denn nach S. 78 wird eine Punktreihe durch eine *jede* Reciprocität, insbesondere also auch durch ein Polarsystem, in ein projektives Strahlbüschel übergeführt. Es ist daher auch das Strahlbüschel der Polaren $y\mathfrak{p}$, welches der Punktreihe der Punkte y durch das Polarsystem zugewiesen wird, zu dieser Punktreihe projektiv. Die Punktreihe der Punkte z andererseits ist wieder zum Strahlbüschel dieser Polaren $y\mathfrak{p}$ perspektiv. Denn die Erklärungsgleichung konjugierter Punkte

411) . . . . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$

besagt ja, dafs der zu y konjugierte Punkt z auf dem Strahle $y\mathfrak{p}$ liegt. Folglich ist die Punktreihe der Punkte z zu dem Strahlbüschel der Polaren $y\mathfrak{p}$ auch projektiv (vgl. Teil II S. 43) und somit auch projektiv zu der mit diesem Strahlbüschel projektiven Punktreihe der Punkte y.

Die beiden Punktreihen der Punkte y und z haben nun aber noch die *besondere Eigenschaft,* dafs, wenn dem Punkte y, aufgefafst als Punkt der ersten Punktreihe, in der zweiten Punktreihe der Punkt z zugeordnet ist, dann auch umgekehrt dem Punkte z, aufgefafst als Punkt der ersten Punktreihe, in der zweiten Punktreihe der Punkt y zugewiesen wird, was man unmittelbar aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen

411) . . . . . . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$ und 413) $[y \cdot z\mathfrak{p}] = 0$

folgern kann. *Es entsprechen sich also je zwei einander zugeordnete Punkte der beiden Punktreihen wechselseitig.*

Zwei solche projektive Punktreihen auf dem nämlichen Träger mit der besonderen Eigenschaft, dafs ihre zugeordneten Punkte sich wechselseitig entsprechen, spielen in der Geometrie der Kegelschnitte eine wichtige Rolle, und man hat daher für sie auch einen besonderen Namen eingeführt. Man sagt nämlich von zwei solchen Punktreihen einer Geraden, sie bilden eine Punktinvolution oder kurz eine Involution auf der Geraden, und nennt zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen ein Paar der Involution.

Eine solche Punktinvolution auf der Geraden kann als ein *binäres Abbild des Polarsystems in der Ebene* aufgefafst werden, insofern die beiden Grundeigenschaften einer solchen Involution, die projektive Zuordnung und das wechselseitige Entsprechen der Elemente, ja auch gerade für das Polarsystem charakteristisch sind. Aus diesem Grunde wurde schon oben das Polarsystem als *involutorische* reciproke Verwandtschaft bezeichnet. Die oben betrachtete Involution auf der Geraden G bildet aber ferner zugleich einen *Ausschnitt aus dem Polarsystem* $\mathfrak{p}$; denn man kann das oben gewonnene Ergebnis auch in der Form aussprechen:

Auf jeder beliebigen Geraden G der Ebene bilden die konjugierten Punkte eines Polarsystems eine Involution.

Von dieser Involution sagt man noch, sie werde *durch das Polarsystem* (oder auch wohl durch seine Polkurve) *auf der Geraden G hervorgerufen.*

Die *vollständige analytische Darstellung* dieser Involution erhält man, wenn man zu der Bedingungsgleichung für ein Paar konjugierte Punkte überhaupt

411) . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$ noch die Gleichung hinzugefügt 414) $[yz \cdot G] = 0$,

welche ausdrückt, dafs die Gerade des Stabes $[yz]$ mit der Geraden des Stabes G zusammenfällt.

Schneidet die Gerade $G = [yz]$ die Polkurve $[x \cdot x\mathfrak{p}] = 0$ in zwei reellen Punkten x_1 und x_2, so bestehen für diese Punkte die Gleichungen

415) . . . . . . $[x_1 \cdot x_1\mathfrak{p}] = 0$ und 416) $[x_2 \cdot x_2\mathfrak{p}] = 0$,

und vergleicht man diese Gleichungen ihrer Form nach mit der Bedingung $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$ für ein Paar y, z der Involution 411), 414), so sieht man, dafs die Punkte x_1 und x_2 in der Involution, die das Polarsystem auf der Geraden G hervorruft, sich selbst konjugiert sind, das heifst, die Doppelpunkte dieser Involution bilden. Denkt man sich ferner diese Doppelpunkte x_1 und x_2 wie oben auf S. 93 als Vielfachensummen irgend zweier Punkte y und z dargestellt, welche ein Paar dieser Involution bilden, also der Gleichung

411) . . . . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$

genügen, so ergeben sich, wegen 411) mit Rücksicht auf 407) oder 408) für die Doppelpunkte x_1 und x_2 Ausdrücke von der Form

410) . . . . $x_1 = y + \mathfrak{h} z$ und $x_2 = y - \mathfrak{h} z$,

und man erhält daher den Satz:

Schneidet eine Gerade G die Polkurve eines Polarsystems, so liegen ihre Schnittpunkte x_1 und x_2 harmonisch zu jedem Paare y, z derjenigen Involution, die das Polarsystem auf der Geraden G hervorruft.

Übrigens sieht man sofort, dafs diese Beziehung auch unabhängig von dem Begriff der Polkurve, auf entsprechende Weise wie oben, schon im binären Gebiet hätte entwickelt werden können, und dafs daher auch ganz allgemein der Satz besteht:

Hat eine Involution auf einer Geraden zwei reelle Doppelpunkte, so wird jedes Paar entsprechender Punkte durch die beiden Doppelpunkte harmonisch getrennt.

Ferner bemerkt man, dafs von diesem Satze auch die *Umkehrung* gilt:

Die Gesamtheit der Punktpaare einer Geraden, deren Punkte durch zwei feste Punkte dieser Geraden harmonisch getrennt werden, bildet eine Involution, von der jene festen Punkte die Doppelpunkte sind.

In ähnlicher Weise wie oben die Bedingungsgleichungen

383) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$

für die Ableitzahlen des Bruches $\boldsymbol{p}$ zu dem Zwecke geometrischer Folgerungen umgewandelt wurden, lassen sich auch die aus den Gleichungen 383) folgenden Bedingungsgleichungen

384) . . . . $\mathfrak{B}_{ik} = \mathfrak{B}_{ki}$

für die Ableitzahlen des adjungierten Bruches $\boldsymbol{P}$ umformen und durch Gleichungen ersetzen, die eine direkte geometrische Deutung zulassen.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 364), 361) und 362) wird nämlich wieder

417) . . . . $\mathfrak{B}_{ik} = [E_k b_i]$ oder wegen 352)

418) . . . . $\mathfrak{B}_{ik} = [E_k \cdot E_i \boldsymbol{P}]$.

Die Bedingungsgleichungen 384) verwandeln sich daher in die Gleichungen

419) . . . . $[E_k \cdot E_i \boldsymbol{P}] = [E_i \cdot E_k \boldsymbol{P}]$.

Aus diesen Gleichungen für die Grundstäbe E_i und E_k folgt dann wieder genau so wie in der dualistisch entsprechenden Entwickelung (vgl. S. 89) das Bestehen der analogen Gleichung für zwei beliebige Stäbe V und W, das heifst der Gleichung

420) . . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = [V \cdot W\boldsymbol{P}]$.

Diese Gleichung möge die zweite Grundgleichung des Polarsystems heifsen; sie kann als Ausgangspunkt für die Ableitung derjenigen Eigenschaften des Polarsystems dienen, die den bisher entwickelten Eigenschaften dualistisch entsprechen. Zunächst folgt aus ihr wieder, dafs mit der Gleichung

421) . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$ stets die Gleichung 422) . . . $[V \cdot W\boldsymbol{P}] = 0$

verknüpft ist. Darin aber liegt der Satz (vgl. Fig. 78):

Wenn die Gerade des Stabes W durch den Pol von V geht, so geht auch die Gerade des Stabes V durch den Pol von W hindurch.

Ferner frage man nach der Kurve, die der Polkurve dualistisch entspricht, das heifst nach dem Umhüllungsgebilde aller derjenigen Geraden U der Ebene, die durch ihre eigenen Pole $U\boldsymbol{P}$ hindurchgehen. Diese Kurve möge die **Polarkurve** des Polarsystems genannt werden. Aus ihrer Erklärung folgt unmittelbar die Gleichung der Kurve:

423) . . . . $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$.

Diese sagt aus, dafs alle Geraden, die der angegebenen Forderung genügen, eine Kurve zweiter Klasse umhüllen. In der That gehen von jedem Punkte der Ebene zwei reelle oder imaginäre Tangenten an die Kurve 423). Um dies zu zeigen, denke man sich jenen Punkt als äufseres Produkt $[VW]$ zweier beliebigen Stäbe V und W dargestellt, welche durch ihn hindurchgehen (vgl. Fig. 79). Dann wird jeder beliebige Stab des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[VW]$ sich durch eine Summe von der Form $V + \mathfrak{h} W$ aus-

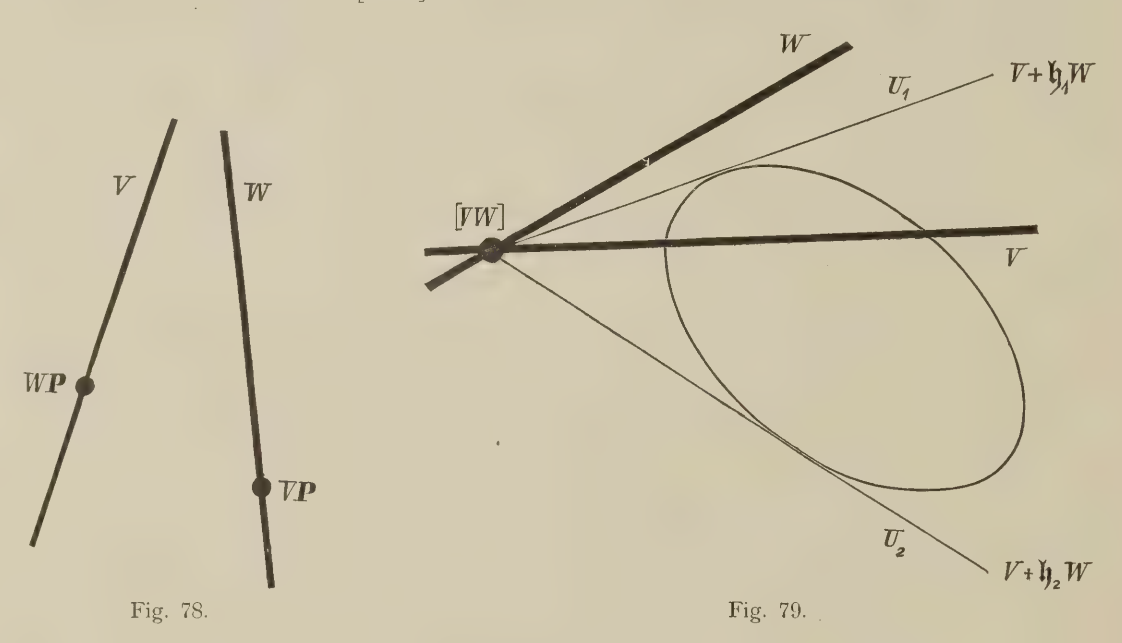


Fig. 78. Fig. 79.

drücken lassen, und man wird die in dem Strahlbüschel mit dem Scheitel $[VW]$ enthaltenen Tangenten der Polarkurve 423) erhalten, wenn man in die Gleichung 423) statt U den Ausdruck $V + \mathfrak{h} W$ für einen beliebigen Strahl jenes Strahlbüschels substituiert. Dadurch aber bekommt man für den Parameter $\mathfrak{h}$ der in dem Strahlbüschel enthaltenen Tangenten der Kurve die Gleichung:

424) . . . . . . $[(V + \mathfrak{h} W) \cdot (V + \mathfrak{h} W)\boldsymbol{P}] = 0$ oder

425) . . . $[V \cdot V\boldsymbol{P}] + \mathfrak{h}([W \cdot V\boldsymbol{P}] + [V \cdot W\boldsymbol{P}]) + \mathfrak{h}^2[W \cdot W\boldsymbol{P}] = 0$,

für die man mit Rücksicht auf die zweite Grundgleichung des Polarsystems

420) . . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = [V \cdot W\boldsymbol{P}]$

auch schreiben kann

426) . . . . . $[V \cdot V\boldsymbol{P}] + 2\mathfrak{h}[W \cdot V\boldsymbol{P}] + \mathfrak{h}^2[W \cdot W\boldsymbol{P}] = 0$.

Diese in $\mathfrak{h}$ quadratische Gleichung liefert für den Parameter $\mathfrak{h}$ die beiden Werte

427) . . . $\begin{Bmatrix} \mathfrak{h}_1 \\ \mathfrak{h}_2 \end{Bmatrix} = \dfrac{-[W \cdot V\boldsymbol{P}] \pm \sqrt{[W \cdot V\boldsymbol{P}]^2 - [V \cdot V\boldsymbol{P}]\,[W \cdot W\boldsymbol{P}]}}{[W \cdot W\boldsymbol{P}]}$.

An die Polarkurve lassen sich also in der That von jedem Punkte $[VW]$ der Ebene zwei reelle oder imaginäre Tangenten legen, nämlich die Tangenten

$$428) \quad \ldots\ldots \quad U_1 = V + \mathfrak{h}_1 W \quad \text{und} \quad U_2 = V + \mathfrak{h}_2 W;$$

und sie ist somit wirklich eine Kurve zweiter Klasse, das heifst, man hat den Satz:

Die Polarkurve eines Polarsystems ist eine Kurve zweiter Klasse.

Hält man in der Gleichung 426) den Stab V fest, denkt sich aber den Stab W in der Ebene veränderlich, den Punkt $[VW]$ also auf der Geraden V verschiebbar, und fragt nach denjenigen Stäben W, welche durch die beiden vom Punkte $[VW]$ ausgehenden Tangenten U_1 und U_2 harmonisch getrennt werden (vgl. Fig. 80), so hat man die Bedingung aufzustellen, der die Stäbe W genügen müssen, damit die Gleichung 426) für $\mathfrak{h}$ zwei entgegengesetzt gleiche Werte $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_2 = -\mathfrak{h}$ liefere, damit sich also für die Tangenten U_1 und U_2 Werte von der Form

$$429) \begin{cases} U_1 = V + \mathfrak{h} W \text{ und} \\ U_2 = V - \mathfrak{h} W \end{cases}$$

ergeben. Diese Bedingung findet man, wenn man den Koeffizienten von $\mathfrak{h}$ in der Gleichung 426) gleich Null setzt, wodurch man für den Stab W die Gleichung erhält

$$430) \quad [W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0,$$

das heifst, es ergiebt sich eine Gleichung ersten Grades in W, welche aussagt, dafs das äufsere Produkt des Stabes W und des Poles $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V verschwindet; darin liegt der Satz:

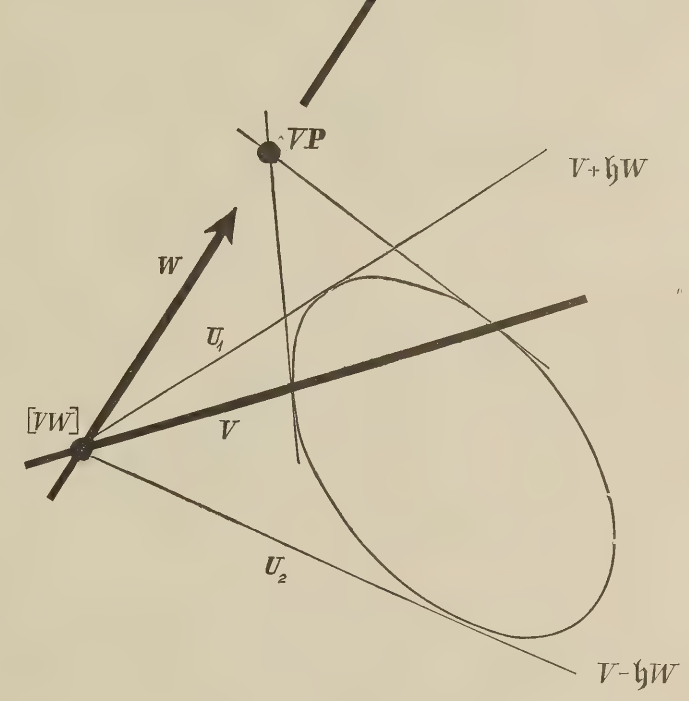


Fig. 80.

Alle Stäbe W, welche von einer festen Geraden V durch die vom Punkte $[VW]$ ausgehenden Tangenten der Polkurve harmonisch getrennt werden, gehen durch einen festen Punkt, nämlich durch den Pol $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V hindurch. Oder:

Jedes Tangentenpaar, das sich von einem Punkte einer Geraden V an die Polarkurve eines Polarsystems legen läfst, bildet, zusammen mit der Geraden V und der Geraden nach ihrem Pole $V\boldsymbol{P}$ in Bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$, einen harmonischen Strahlwurf. Oder kürzer:

Der Punkt $V\boldsymbol{P}$, welcher einer Geraden V durch ein Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ als Pol zugewiesen ist, wird durch die Polarkurve des Polarsystems von der Geraden V harmonisch getrennt.

Der Pol $V\boldsymbol{P}$ einer beliebigen Geraden V in Bezug auf ein Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ ist also *identisch mit dem gewöhnlichen Kegelschnittspol* jener Geraden in Bezug auf die Polar-

kurve des Polarsystems. So sind namentlich auch die drei Zählerpunkte $b_i = E_i \boldsymbol{P}$ die Kegelschnittspole der Grundstäbe E_i in Bezug auf die Polarkurve des Polarsystems.

Eine besondere Besprechung erfordert noch der Fall, wo der Stab V, dessen Pol $V\boldsymbol{P}$ zufolge der Gleichung 430) von den Geraden der Stäbe W umhüllt wird, selbst die Polarkurve $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$ berührt, also der Gleichung

431) . . . . $[V \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$ Genüge leistet (vgl. Fig. 81).

In diesem Falle geht die Gerade V, wie die Gleichung 431) zeigt, selbst durch ihren Pol $V\boldsymbol{P}$ hindurch, was übrigens auch aus dem *Begriffe der Polarkurve* folgt. Der oben betrachtete Punkt $[VW]$, den ein beliebiger Strahl W des Strahlbüschels mit dem Scheitel $V\boldsymbol{P}$ aus der Geraden V ausschneidet, fällt also mit dem Punkte $V\boldsymbol{P}$, das heifst mit dem Pole der Geraden V, zusammen. Aus der Voraussetzung, nach welcher die Gerade des Stabes V eine Tangente der Polarkurve ist, folgt aber weiter, dafs von den beiden Tangenten $U_1 = V + \mathfrak{h}_1 W$ und $U_2 = V + \mathfrak{h}_2 W$, die sich von dem Punkte $[VW]$ aus an die Polarkurve legen lassen, die eine, sagen wir die Tangente $U_1 = V + \mathfrak{h}_1 W$, mit der Geraden V zusammenfallen mufs, und es wird somit $\mathfrak{h}_1 = 0$; und, da wegen 430) überdies $\mathfrak{h}_2 = -\mathfrak{h}_1$ ist, so wird auch $\mathfrak{h}_2 = 0$, das heifst, auch die zweite vom Punkte $[VW]$ ausgehende Tangente U_2 fällt mit der Geraden V zusammen. Vom Punkte $[VW]$, oder was dasselbe ist, vom Punkte $V\boldsymbol{P}$, läfst sich daher nur *eine* Tangente an die Polarkurve ziehen, nämlich die Gerade V selbst; folglich ist der Punkt $V\boldsymbol{P}$ der Berührungspunkt der Geraden V. Man hat also den Satz:

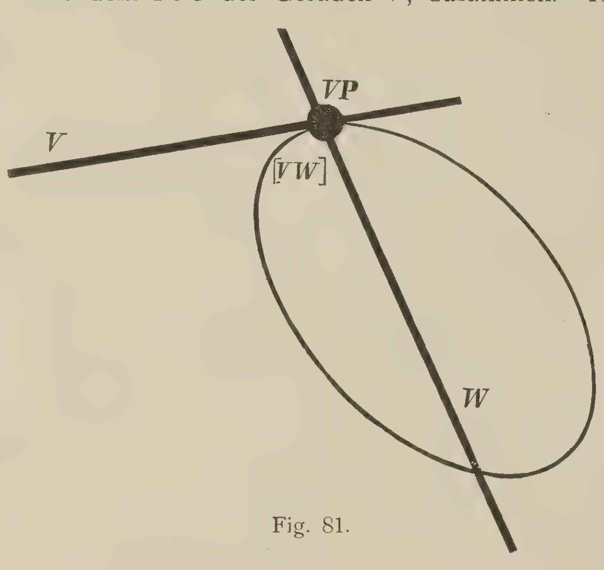


Fig. 81.

Der Pol einer Tangente der Polarkurve ist der Berührungspunkt dieser Tangente.

Nennt man noch zwei gerade Linien V und W eines Polarsystems, von denen jede durch den Pol der andern geht (vgl. S. 97), hinsichtlich des Polarsystems konjugiert, so kann man die Gleichung

430) . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$ oder die gleichwertige Gleichung 432) $[V \cdot W\boldsymbol{P}] = 0$

als die Bedingung dafür bezeichnen, dafs die beiden Geraden V und W hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ konjugiert sind.

Läfst man dann die Geraden V ein Strahlbüschel beschreiben, dessen Mittelpunkt mit f bezeichnet sein möge (vgl. Fig. 82), und bestimmt zu jedem Strahle V dieses Strahlbüschels denjenigen konjugierten Strahl W, der *ebenfalls durch f hindurchgeht,* so bilden die Strahlen W im Punkte f ein zweites, zum Büschel der Strahlen V *projektives Strahlbüschel mit der besonderen Eigenschaft, dafs die Strahlen beider Büschel einander wechselseitig zugeordnet sind.* In der That sind zunächst die beiden Büschel der Strahlen V und W *projektiv*; denn nach S. 82 wird ein Strahlbüschel durch eine *jede* Reciprocität, insbesondere also auch durch ein Polarsystem in eine projektive Punktreihe

übergeführt. Es ist daher auch die Punktreihe der Pole VP, welche dem Strahlbüschel der Geraden V zugewiesen wird, zu diesem Strahlbüschel projektiv. Das Strahlbüschel der Geraden W andererseits ist wieder zu der Punktreihe dieser Pole VP perspektiv. Denn die Erklärungsgleichung konjugierter Geraden

430) . . . . $[W \cdot VP] = 0$

besagt ja, dafs die zu V konjugierte Gerade W durch den Punkt VP hindurchgeht. Folglich ist das Strahlbüschel der Geraden W zu der Punktreihe der Pole VP auch projektiv (vgl. Teil II S. 42) und somit auch projektiv zu dem mit dieser Punktreihe projektiven Strahlbüschel der Geraden V.

Dafs aber auch die Strahlen V und W der beiden Strahlbüschel einander *wechselseitig zugeordnet* sind, folgt aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen

430) . $[W \cdot VP] = 0$ und

432) . $[V \cdot WP] = 0$.

Man sagt nun von zwei projektiven Strahlbüscheln, deren Scheitel in einen Punkt zusammenfallen, und deren zugeordnete Strahlen sich wechselseitig entsprechen, sie bilden zusammen eine Strahlinvolution oder kurz eine Involution in jenem Punkte und nennt zwei entsprechende Strahlen der beiden Strahlbüschel ein Paar der Involution.

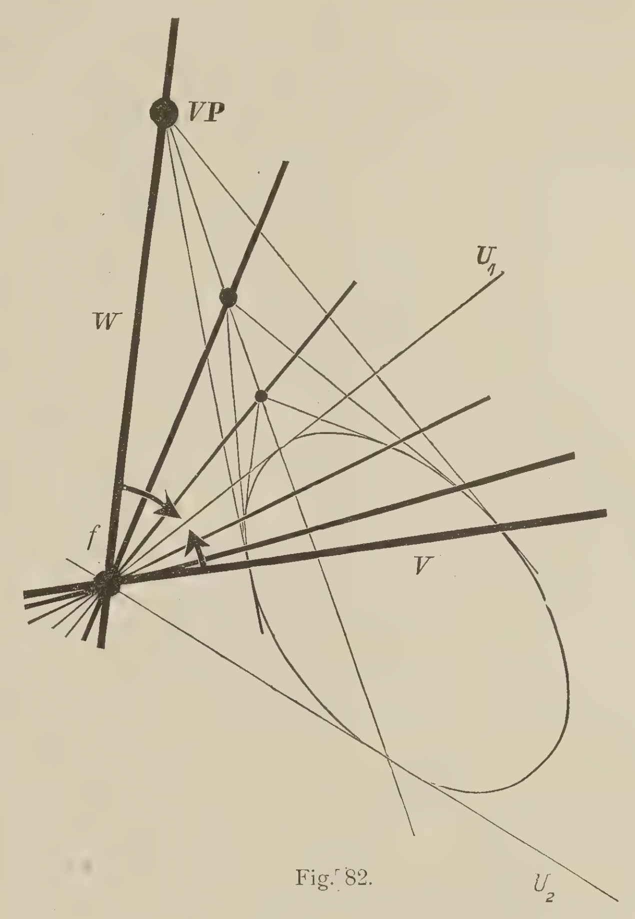


Fig. 82.

Eine solche Strahlinvolution in einem Punkte kann ebenso wie die Punktinvolution auf einer Geraden als ein *binäres Abbild des Polarsystems in der Ebene* aufgefafst werden. Die oben betrachtete Involution im Punkte f insbesondere bildet überdies einen *Ausschnitt aus dem Polarsystem* P; denn man kann das gewonnene Ergebnis auch in der Form aussprechen:

In jedem beliebigen Punkte f der Ebene bilden die durch ihn gehenden konjugierten Strahlen eines Polarsystems P eine Strahlinvolution.

Von dieser Involution sagt man ferner, sie werde *durch das Polarsystem* P (oder auch wohl durch seine Polarkurve) *in dem Punkte f hervorgerufen.*

Die *vollständige analytische Darstellung* dieser Involution erhält man, wenn man zu der Bedingung für ein Paar konjugierte Geraden V und W überhaupt

430) . $[W \cdot VP] = 0$ noch die Gleichung hinzufügt 433) $[VW \cdot f] = 0$,

welche aussagt, dafs sich die Geraden V und W im Punkte f schneiden.

Lassen sich von dem Punkte f an die Polarkurve $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$ zwei reelle Tangenten U_1 und U_2 legen, so bestehen für diese Tangenten die Gleichungen

434) . . . . . . $[U_1 \cdot U_1\boldsymbol{P}] = 0$ und 435) $[U_2 \cdot U_2\boldsymbol{P}] = 0$,

und vergleicht man diese Gleichungen ihrer Form nach mit der Bedingung $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$ für ein Paar V und W der Strahlinvolution 430), 433), so sieht man, dafs die Geraden U_1 und U_2 in der Involution, die das Polarsystem $\boldsymbol{P}$ in dem Punkte f hervorruft, sich selbst konjugiert, das heifst die Doppelstrahlen dieser Involution sind. Denkt man sich daher diese Doppelstrahlen U_1 und U_2 wie oben auf S. 98 f. als Vielfachensummen irgend zweier Stäbe V und W dargestellt, welche ein Paar dieser Involution bilden, also der Gleichung

430) . . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$

genügen, so ergeben sich wegen 430) mit Rücksicht auf 426) oder 427) für die Doppelstrahlen U_1 und U_2 Ausdrücke von der Form

429) . . . . . . $U_1 = V + \mathfrak{h} W$ und $U_2 = V - \mathfrak{h} W$,

und man erhält daher den Satz:

Lassen sich von einem Punkte f an die Polarkurve eines Polarsystems zwei reelle Tangenten U_1 und U_2 ziehen, so liegen diese Tangenten harmonisch zu jedem Paare V und W derjenigen Strahlinvolution, die das Polarsystem in dem Punkte f hervorruft.

Die gewonnene Eigenschaft der Strahlinvolution hat aber wieder eine allgemeinere Bedeutung. Denn man kann ganz unabhängig von dem Begriffe der Polarkurve, auf entsprechende Weise wie oben, schon im binären Gebiete den Satz beweisen:

Hat eine Strahlinvolution eines Punktes zwei reelle Doppelstrahlen, so wird jedes Paar der Involution durch die beiden Doppelstrahlen harmonisch getrennt. Ferner gilt von diesem Satze auch die Umkehrung:

Die Gesamtheit der Strahlpaare eines Strahlbüschels, die von zwei festen Strahlen dieses Büschels harmonisch getrennt werden, bildet eine Strahlinvolution, deren Doppelstrahlen jene festen Strahlen sind.

Die Thatsache, dafs der Pol und die Polare eines Polarsystems sowohl durch dessen Polkurve (vgl. S. 94) wie durch dessen Polarkurve (vgl. S. 99) harmonisch getrennt werden, legt die Vermutung nahe, dafs die beiden Kurven überhaupt identisch sind, dafs also die Tangenten der Polkurve nichts anderes sind als die Umhüllungsgeraden der Polarkurve (vgl. Fig. 83). Um dies rein analytisch zu beweisen, bezeichne man die Polare des Punktes x mit U, setze also

436) . . . . $x\mathfrak{p} = U$

Ist dann ferner noch

437) . . . . $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist, so wird nach 380)

$$x = U\frac{1}{\mathfrak{p}}$$ oder wegen 388)

438) . . . . $x = U\frac{\boldsymbol{P}}{\mathfrak{b}}$.

Mit Hülfe der beiden Formeln 436) und 438) aber läfst sich die linke Seite der Polkurvengleichung

439) . . . . $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0$ umformen; man erhält

$$[x \cdot x\boldsymbol{p}] = \left[U \frac{\boldsymbol{P}}{\mathfrak{b}} \cdot U \right]$$ oder wegen 61) und 62)

440) . . . . $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = \frac{1}{\mathfrak{b}} [U \cdot U\boldsymbol{P}]$

Diese Umformung war aber an die Bedingung geknüpft, dafs $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist, und zeigt also, dafs, *wenn diese Bedingung erfüllt ist, und unter U die Polare $x\boldsymbol{p}$ des Punktes x verstanden wird,* die Gleichung

439) . . . . $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0$ stets die Gleichung

441) . . . . $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$

nach sich zieht, und dafs umgekehrt die letztere Gleichung die erstere zur Folge hat.

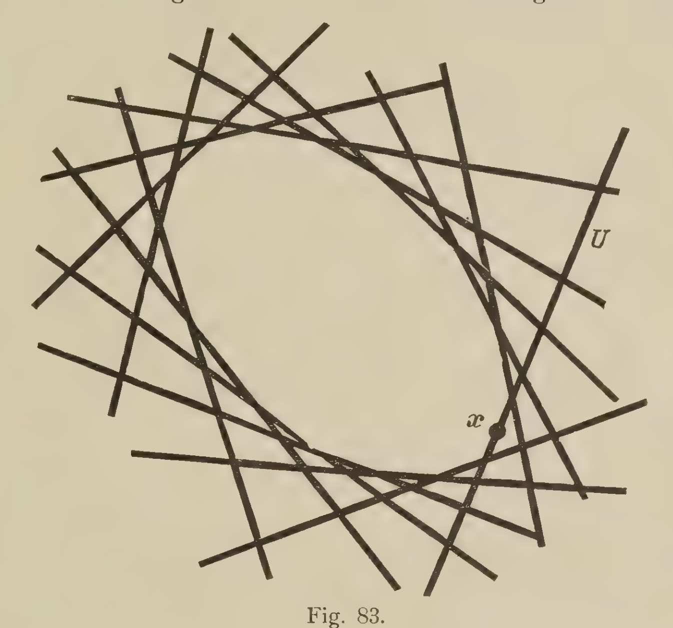


Fig. 83.

Wenn aber der Punkt x der Gleichung 439) genügt, also auf der Polkurve liegt, so ist, wie oben (vgl. S. 94 f.) gezeigt ist, die Polare $U = x\boldsymbol{p}$ die Tangente der Polkurve im Punkte x; und da die Gleichung 441) die Polarkurve darstellte, so besagt das Zusammenbestehen der Gleichungen 439) und 441) wirklich, dafs jede Tangente der Polkurve eine Umhüllungsgerade der Polarkurve ist.

Genügt andererseits die Gerade U der Gleichung 441), ist somit U eine Tangente der Polarkurve, und ist aufserdem wie vorher $x\boldsymbol{p} = U$, also nach 438) $x = \frac{1}{\mathfrak{b}} U\boldsymbol{P}$, so ist der Punkt x, welcher dann der letzten Gleichung zufolge den Pol jener Tangente U der Polarkurve darstellt, nach S. 100 der Berührungspunkt jener Tangente U der Polarkurve. Das Zusammenbestehen der Gleichungen 441) und 439) zeigt daher, dafs die Berührungspunkte der Tangenten der Polarkurve zugleich Punkte der Polkurve sind.

Man hat also den Satz:

Unter der Voraussetzung, dafs die Determinante $\mathfrak{b}$ eines Polarsystems von Null verschieden ist, fällt seine Polkurve mit seiner Polarkurve zusammen.

Zehnter Abschnitt.

Ausartende Polarsysteme.

Die bisherige Untersuchung erstreckte sich vorzugsweise auf Polarsysteme, deren Determinante $\mathfrak{b} = |\mathfrak{b}_{ik}|$ von Null verschieden ist. Und in der That erfordern die Polarsysteme mit verschwindender Determinante eine besondere Betrachtung, zu der wir nunmehr übergehen wollen.

Es sei also ein Polarsystem gegeben durch einen Bruch

$$442) \quad \mathfrak{p} = \frac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3},$$

der als Ausdruck eines Polarsystems der Grundgleichung des Polarsystems

$$443) \quad [z \cdot y\mathfrak{p}] = [y \cdot z\mathfrak{p}]$$

Genüge leistet, der sich aber von den bis betrachteten Brüchen $\mathfrak{p}$ dadurch unterscheidet, dafs das äufsere Produkt seiner Zähler, das heifst das Produkt

$$444) \quad [B_1 B_2 B_3] = 0$$

ist, dafs also die Determinante $\mathfrak{b} = |\mathfrak{b}_{ik}|$ verschwindet. Diese Gleichung 444) bedingt es, dafs der reciproke Wert des Bruches $\mathfrak{p}$ keinen Sinn mehr hat, und dafs daher alle diejenigen Formeln des vorigen Abschnitts, in denen der Bruch $\frac{1}{\mathfrak{p}}$ auftrat, ihre Bedeutung verlieren.

Aus der Gleichung 444) folgt, dafs zwischen den drei Zählerstäben B_1, B_2, B_3 eines solchen *ausgearteten Polarsystems* $\mathfrak{p}$ eine Zahlbeziehung herrscht, also eine Gleichung von der Form

$$445) \quad \mathfrak{z}_1 B_1 + \mathfrak{z}_2 B_2 + \mathfrak{z}_3 B_3 = 0$$

besteht, in der wenigstens *eine* der drei Zahlgröfsen $\mathfrak{z}_i$ von Null verschieden ist. Man hat dann zwei Fälle zu unterscheiden, erstens den Fall, wo von den drei Produkten aus je zweien der Gröfsen B_i wenigstens eins von Null verschieden ist, und zweitens den Fall, wo alle diese drei Produkte gleichzeitig verschwinden.

Zuerst sei also der Fall betrachtet, dafs wenigstens eins von den drei Produkten $[B_2 B_3]$, $[B_3 B_1]$, $[B_1 B_2]$ *von Null verschieden ist.* Es läfst sich zeigen, dafs in diesem Falle neben der Gleichung 445) nicht noch eine zweite von ihr unabhängige Zahlbeziehung zwischen den B_i bestehen kann. Ist nämlich zum Beispiel das Produkt

$$446) \quad [B_1 B_2] \gtrless 0,$$

so herrscht sicher zwischen den Stäben B_1 und B_2 keine Zahlbeziehung. Daraus aber folgt, dafs in der Gleichung 445) der Koeffizient $\mathfrak{z}_3 \lessgtr 0$ sein mufs; denn bei verschwindendem $\mathfrak{z}_3$ würde sich ja die Gleichung 445) auf eine Zahlbeziehung zwischen B_1 und B_2 allein reduzieren, und eine solche ist eben durch die Ungleichung 446) ausgeschlossen. Ist aber $\mathfrak{z}_3 \gtrless 0$, so ist die Gleichung 445) nach B_3 auflösbar und liefert für B_3 den Wert

$$447) \quad B_3 = -\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_3} B_1 - \frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_3} B_2.$$

Angenommen nun, es bestünde zwischen den drei Stäben B_1, B_2, B_3 noch eine zweite Zahlbeziehung:

448) . . . . $\mathfrak{f}_1 B_1 + \mathfrak{f}_2 B_2 + \mathfrak{f}_3 B_3 = 0$,

die von der Zahlbeziehung 445) unabhängig wäre, so setze man den Wert von B_3 aus 447) in die Gleichung 448) ein. Dadurch würde sich diese dann in eine Gleichung von der Form

449) . . . . $\mathfrak{g}_1 B_1 + \mathfrak{g}_2 B_2 = 0$

verwandeln müssen; und in dieser können dann wieder die beiden Zahlgröfsen $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ nicht beide gleichzeitig verschwinden, weil sonst die beiden Zahlbeziehungen 445) und 448) gegen die Annahme nicht von einander unabhängig sein würden. Es gäbe also zwischen den Stäben B_1 und B_2 eine Zahlbeziehung. Eine solche aber widerspricht der Voraussetzung, nach der das Produkt $[B_1 B_2] \gtrless 0$ sein soll. Man hat also den Satz:

Sobald also das Produkt

444) . . . . $[B_1 B_2 B_3] = 0$

ist, aber wenigstens *eins* von den drei Produkten $[B_2 B_3]$, $[B_3 B_1]$, $[B_1 B_2]$ von Null verschieden ist, besteht zwischen den drei Gröfsen B_i *eine und nur eine* Zahlbeziehung

445) . . . . $\mathfrak{s}_1 B_1 + \mathfrak{s}_2 B_2 + \mathfrak{s}_3 B_3 = 0$.

Eine solche Zahlbeziehung sagt aus, dafs die Geraden der drei Stäbe B_i einen Punkt mit einander gemein haben (vgl. Fig. 84). Um die Eigenschaften zu ermitteln, die hieraus für das Polarsystem $\mathfrak{p}$ entspringen, bezeichne man noch denjenigen Punkt, dessen Ableitzahlen die Koeffizienten der Zahlbeziehung 445) sind, mit s, setze also

450) $s = \mathfrak{s}_1 e_1 + \mathfrak{s}_2 e_2 + \mathfrak{s}_3 e_3$,

so läfst sich wegen 442) die Gleichung 445) auch in der Form schreiben

451) . . . $s\mathfrak{p} = 0$,

in der sie für geometrische Folgerungen geeigneter ist.

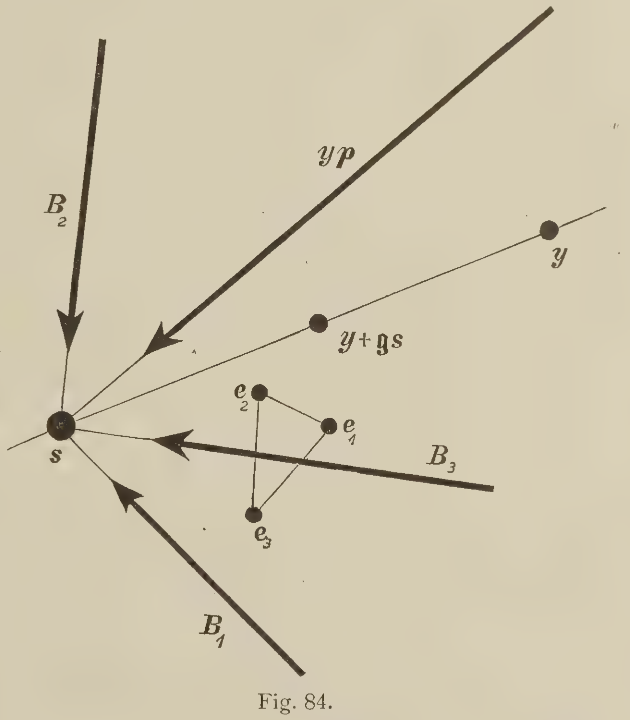


Fig. 84.

Zunächst nämlich zeigt diese Gleichungsform, dafs der Punkt s in dem Polarsystem $\mathfrak{p}$ keine Polare besitzt, oder, wenn man will, dafs seine Polare ganz unbestimmt ist. Man kann nämlich die Gleichung 451) auch durch die Gleichung

452) . . $s\mathfrak{p} = 0 \cdot W$

ersetzen, in der W einen ganz beliebigen Stab der Ebene bedeutet, und sagt daher von dem Punkte s, *er sei zum Polarsystem* $\mathfrak{p}$ *apolar*.

Ferner folgt aus der Gleichungsform 451) sofort, dafs der Punkt s auf der Polkurve des Polarsystems liegt. Denn multipliziert man die Gleichung 451) mit s, so findet man für den Punkt s die Zahlgleichung

453) . . . . $[s \cdot s\mathfrak{p}] = 0$,

aus der hervorgeht, dafs *der Punkt s der Polkurve*

454) . . . . $[x \cdot x\mathfrak{p}] = 0$ *angehört.*

Aber die Gleichung 451) zeigt zugleich, dafs *der Punkt s auch auf der Geraden aller drei Grundstäbe B_i liegen mufs*, also der gemeinsame Schnittpunkt dieser drei Geraden ist. In der That erhält man mit Rücksicht auf die Grundgleichung 443) des Polarsystems für die Produkte $[sB_i]$ die Darstellung

455) . . . . $[sB_i] = [s \cdot e_i \mathfrak{p}] = [e_i \cdot s\mathfrak{p}] = 0\,,$

welche wirklich aussagt, dafs der Punkt s den drei Polaren B_i der drei Grundpunkte e_i angehört. Dies Ergebnis läfst sich aber noch *verallgemeinern*. Ist nämlich V die Polare eines ganz beliebigen Punktes y, also

456) . . . . $V = y\mathfrak{p}$,

so geht auch die Gerade des Stabes V durch den Punkt s hindurch; denn es wird wieder

457) . . . . $[sV] = [s \cdot y\mathfrak{p}] = [y \cdot s\mathfrak{p}] = 0.$

Sieht man daher davon ab, dafs zufolge der Gleichung 452) jeder beliebige Stab W der Ebene, wenn man sich ihn mit dem Koeffizienten 0 behaftet denkt, als Polare des Punktes s aufgefafst werden kann, so bleiben als Polaren von Punkten der Ebene nur solche Geraden übrig, die durch den ausgezeichneten Punkt s des Polarsystems hindurchgehen.

Dafür aber gehört dann umgekehrt einer jeden durch den Punkt s gehenden Geraden V, die einem Punkte y der Ebene als Polare zugeordnet ist, also der Gleichung

456) . . . . $V = y\mathfrak{p}$

genügt, als Pol *nicht nur* dieser eine Punkt y zu, sondern zugleich auch die sämtlichen Punkte $y + \mathfrak{g}s$ der geraden Verbindungslinie von y und s. Wegen 451) wird nämlich

458) . . . . . . $(y + \mathfrak{g}s)\mathfrak{p} = y\mathfrak{p} + \mathfrak{g}\; s\mathfrak{p} = y\mathfrak{p} = V,$

das heifst, die Gerade V kann auch als die Polare eines jeden beliebigen Punktes $y + \mathfrak{g}s$ jener Verbindungslinie $[ys]$ aufgefafst werden.

Um die Gestalt der Polkurve

459) . . . . $[x \cdot x\mathfrak{p}] = 0$

eines solchen ausgearteten Polarsystems kennen zu lernen, zeige man zunächst gerade so wie bei einem *beliebigen* Polarsystem, dafs die Polkurve 459) von einer jeden Geraden $[yz]$ in zwei reellen oder imaginären Punkten x_1 und x_2 geschnitten wird (vgl. Fig. 85). Man substituiere dazu wieder in die Gleichung 459) statt x den Ausdruck $y + \mathfrak{h}z$ für den laufenden Punkt der Geraden $[yz]$ und erhält so die in $\mathfrak{h}$ quadratische Gleichung

460) . . . . $[y \cdot y\mathfrak{p}] + 2\mathfrak{h}[z \cdot y\mathfrak{p}] + \mathfrak{h}^2[z \cdot z\mathfrak{p}] = 0\,.$

Sind $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ ihre beiden Wurzeln, so sind

$$x_1 = y + \mathfrak{h}_1 z \quad \text{und} \quad x_2 = y + \mathfrak{h}_2 z$$

die beiden gewünschten Schnittpunkte der Geraden $[yz]$ mit der Polkurve. Und diese beiden Schnittpunkte können, falls die Linie $[yz]$ nicht gerade durch den Punkt s hindurchgeht, auch *nicht in einen Punkt zusammenfallen*, weil sonst, wie man sich leicht überzeugt, zwischen den B_i noch eine *zweite* Zahlbeziehung herrschen müfste, was nach S. 104 f. in dem vorliegenden Falle ausgeschlossen ist. Die Gerade $[yz]$ schneidet also wirklich die Polkurve in zwei *getrennten* Punkten x_1 und x_2.

Dann aber folgt wieder aus der für die betrachtete Ausartung charakteristischen Gleichung 451), dafs der Polkurve auch *jeder Punkt derjenigen beiden Geraden* $[x_1 s]$ und $[x_2 s]$ *angehört, welche die Punkte* x_1 *und* x_2 *mit dem Punkte* s *verbinden*. Ein jeder Punkt nämlich, der einer von diesen beiden Geraden angehört, läfst sich unter der Form

$x_i + \mathfrak{g}s$ $(i = 1, 2)$ darstellen. Und setzt man den Ausdruck $x_i + \mathfrak{g}s$ statt x in die linke Seite der Gleichung 459) ein, so nimmt diese die Form an $[(x_i + \mathfrak{g}s) \cdot (x_i + \mathfrak{g}s)\boldsymbol{p}]$ oder

$$[x_i \cdot x_i \boldsymbol{p}] + 2\mathfrak{g}[x_i \cdot s\boldsymbol{p}] + \mathfrak{g}^2[s \cdot s\boldsymbol{p}].$$

In dieser Summe verschwinden aber die beiden letzten Glieder wegen 451); doch auch das erste Glied ist gleich Null, da nach der Voraussetzung die beiden Punkte x_i auf der Polkurve liegen. Also ist der Punkt $x_i + \mathfrak{g}s$ ebenfalls ein Punkt der Polkurve. Die Kurve enthält daher die beiden vom Punkte s nach den Punkten x_1 und x_2 laufenden Geraden und kann, da sie von zweiter Ordnung ist, auch *nur* aus diesen beiden Geraden bestehen, sie zerfällt somit in ein Geradenpaar mit dem Doppelpunkte s.

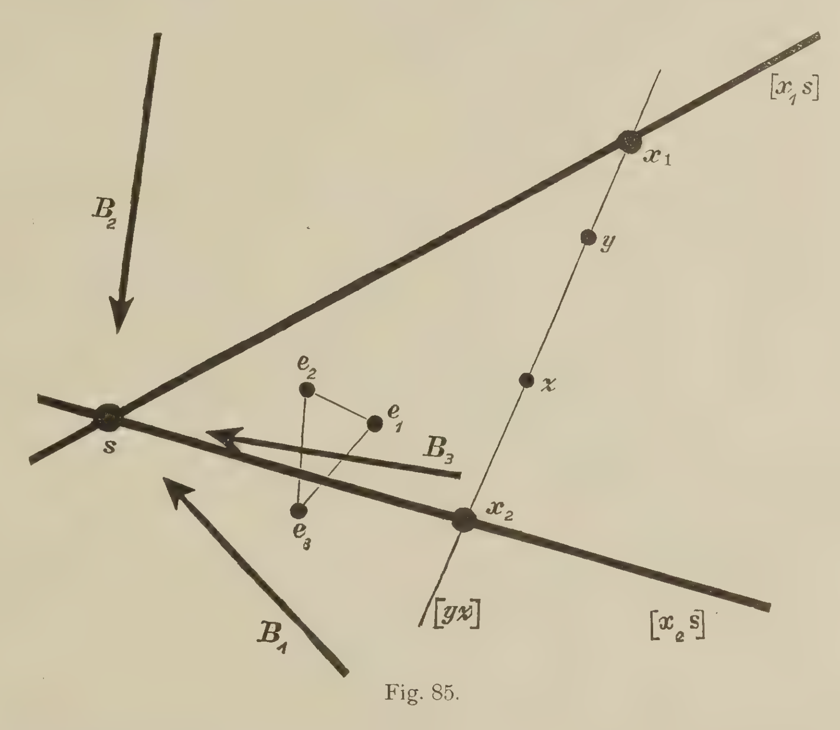


Fig. 85.

Die Parameter $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ der beiden Punkte x_1 und x_2 werden entgegengesetzt gleich, das heifst, der Punktwurf $y z x_1 x_2$ wird *harmonisch* (vgl. Fig. 86), wenn der Koeffizient von $\mathfrak{h}$ in der Gleichung 460) verschwindet, wenn also die Gleichung besteht

$$[z \cdot y\boldsymbol{p}] = 0.$$

Dann liegt der Punkt z auf der Polare $y\boldsymbol{p}$ des Punktes y, von der bereits oben gezeigt ist, dafs sie durch den Punkt s hindurchgeht, und dafs sie zugleich auch jedem Punkte $y + \mathfrak{g}s$ als Polare zugeordnet ist, der auf der Verbindungslinie von y und s gelegen ist.

Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich daher in den Satz zusammenfassen:

Verschwindet das äufsere Produkt der drei Zählerstäbe des Bruches $\boldsymbol{p}$, ohne dafs zugleich alle drei Produkte aus je zweien von diesen Stäben null sind, so zerfällt die Polkurve des Polarsystems $\boldsymbol{p}$ in ein *Linienpaar.* Die Polaren sämtlicher Punkte der Ebene hinsichtlich eines solchen Polarsystems $\boldsymbol{p}$ gehen durch den Doppelpunkt dieses Linienpaars hindurch und

werden durch das Linienpaar von ihren Polen harmonisch getrennt. Umgekehrt kann eine jede Gerade, die durch den Doppelpunkt des Linienpaars geht, als Polare *eines jeden* Punktes aufgefafst werden, der von ihr durch das Linienpaar harmonisch getrennt wird, das heifst, der Pol einer solchen Geraden kann auf dem Strahle beliebig gewählt werden, der jener Geraden hinsichtlich des Linienpaars harmonisch zugeordnet ist.

Da der Satz von der Identität der Pol- und Polarkurve nur für den Fall bewiesen ist, wo das äufsere Produkt $[B_1 B_2 B_3] \gtrless 0$ ist, so bedarf die Polarkurve

$$461) \quad [U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$$

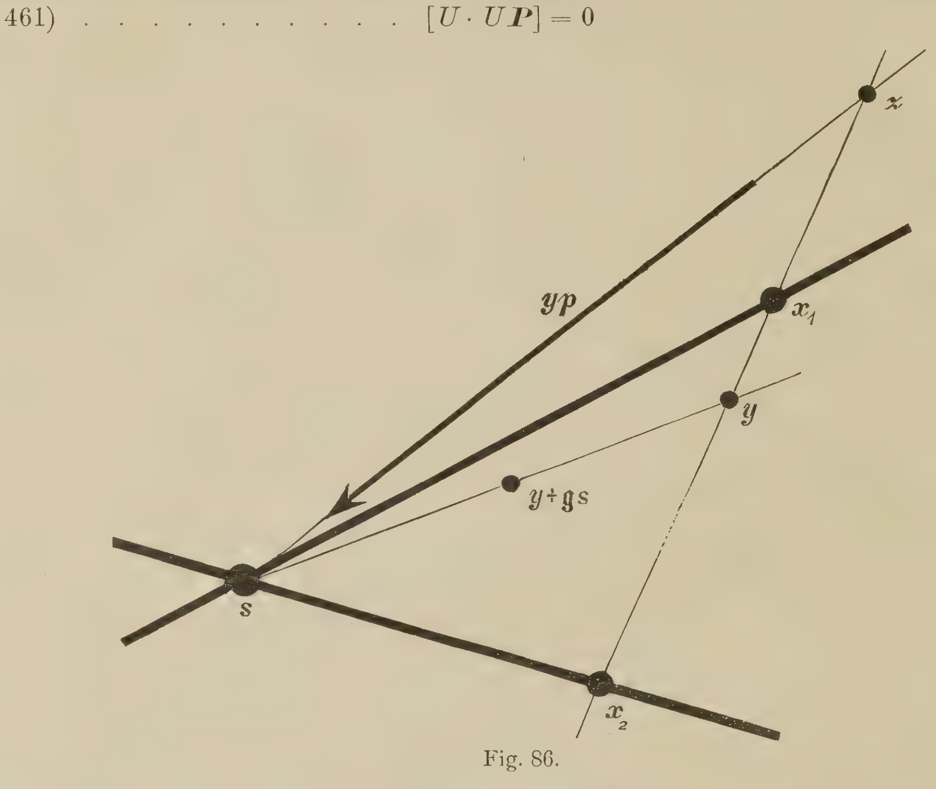


Fig. 86.

bei den ausgearteten Polarsystemen, für welche ja jenes Produkt verschwindet, einer besonderen Untersuchung. Dazu berücksichtige man, dafs bei der soeben betrachteten ersten Art der Ausartung des Polarsystems $\boldsymbol{p}$ die Zähler b_i des adjungierten Bruches

$$462) \quad \boldsymbol{P} = \frac{b_1,\ b_2,\ b_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

ein Vielfaches des Punktes s darstellen müssen. Denn da, wie bewiesen, die drei Zählerstäbe B_i des Bruches $\boldsymbol{p}$ durch den Punkt s hindurchgehen, so müssen die Produkte je zweier von ihnen, das heifst also die Zähler des adjungierten Bruches $\boldsymbol{P}$, sofern sie von Null verschieden sind, abgesehen von einem Zahlfaktor den Punkt s liefern. Aber dies Ergebnis läfst sich noch bestimmter formulieren. Multipliziert man nämlich die Gleichung 445) mit B_3, so erhält man die Gleichung

$$-\mathfrak{s}_1 [B_3 B_1] + \mathfrak{s}_2 [B_2 B_3] = 0 \quad \text{oder wegen} \quad 358)$$

$$\mathfrak{s}_1 b_2 = \mathfrak{s}_2 b_1.$$

Aus dieser Gleichung und den beiden cyklisch entsprechenden Gleichungen folgt zunächst, dafs die Punkte b_i, (falls sie nicht null sind), in *einen* Punkt zusammenfallen, und dieser Punkt kann, wie schon oben gezeigt ist, kein anderer sein als der Punkt s. Andererseits entspringt aus diesen Gleichungen die laufende Proportion

463) . . . . $\mathfrak{s}_1 : \mathfrak{s}_2 : \mathfrak{s}_3 = b_1 : b_2 : b_3,$

für die man auch die Doppelgleichung schreiben kann

464) . . . . $\dfrac{b_1}{\mathfrak{s}_1} = \dfrac{b_2}{\mathfrak{s}_2} = \dfrac{b_3}{\mathfrak{s}_3}.$

Und da aufserdem die Punkte b_i mit dem Doppelpunkte s der Polkurve zusammenfallen, so mufs der gemeinschaftliche Wert der drei Brüche 464) ein gewisses Vielfaches von s sein. Man erhält somit die drei Gleichungen

$$\frac{b_i}{\mathfrak{s}_i} = \mathfrak{k}s \quad \text{oder}$$

465) . . . $b_i = \mathfrak{k}\,\mathfrak{s}_i s.$

Für den adjungierten Bruch 462) ergiebt sich daher die Darstellung

466) $\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}\,\dfrac{\mathfrak{s}_1 s,\ \mathfrak{s}_2 s,\ \mathfrak{s}_3 s}{E_1,\ E_2,\ E_3}.$

Ist also

467) $V = \mathfrak{v}_1 E_1 + \mathfrak{v}_2 E_2 + \mathfrak{v}_3 E_3$

ein ganz beliebiger Stab (vgl. Fig. 87), so wird wegen 466) sein Pol

468) $V\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}(\mathfrak{v}_1\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{v}_2\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{v}_3\mathfrak{s}_3)s.$

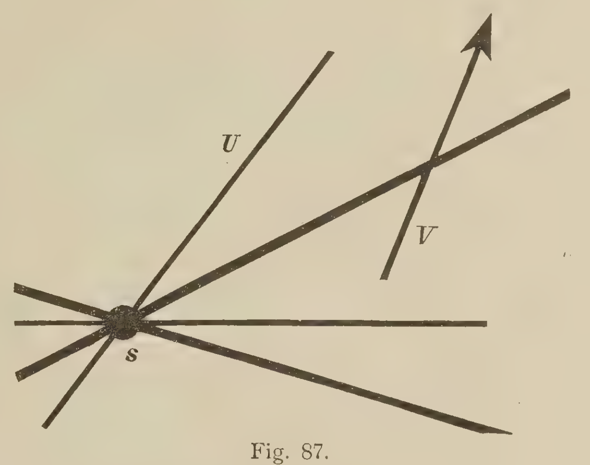


Fig. 87.

Die hier in der Klammer auftretende Summe ist nun aber mit Rücksicht auf die Werte von V und s (vgl. Gleichung 467) und 450)) gleich dem äufseren Produkte $[Vs]$, und die Gleichung 468) läfst sich daher in der einfacheren Form schreiben

469) . . . . $V\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}[Vs]s,$

welche zeigt, dafs der Pol einer beliebigen Geraden V hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ mit dem Punkte s zusammenfällt, wofern nicht die Gerade des Stabes V selbst durch den Punkt s hindurchgeht.

In diesem Falle nämlich verschwindet der Faktor $[Vs]$, und die Gleichung 469) reduziert sich daher auf die Form

470) . . . . $V\boldsymbol{P} = 0,$

welche aussagt, dafs dann der Pol des Stabes V unbestimmt bleibt. Man erhält also den Satz:

Zerfällt die Polkurve eines Polarsystems $\boldsymbol{p}$ in ein Linienpaar mit dem Doppelpunkte s, so sind die Stäbe des Strahlbüschels, das den Punkt s zum Scheitel hat, zu dem adjungierten Polarsystem $\boldsymbol{P}$ apolar.

Ändert man ferner in der Gleichung 469) die Bezeichnung, schreibt sie nämlich in der Form

$$U\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}[Us]s,$$

und multipliziert sie dann mit U, so findet man für die der Polarkurve des Polarsystems zugehörende quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{P}]$ die Darstellung

471) . . . . $[U \cdot \boldsymbol{UP}] = \mathfrak{k}\,[Us]^2$,

das heifst, die quadratische Form $[U \cdot \boldsymbol{UP}]$ ist gleich dem Produkte aus einer Konstanten $\mathfrak{k}$ und dem Quadrat einer linearen Form.

Die Gleichung der gesuchten Polarkurve lautet daher

472) . . . . $[Us]^2 = 0$

und stellt doppelt zählend dasjenige Strahlbüschel dar, dessen Scheitel der Doppelpunkt s des die Polkurve bildenden Linienpaares ist. Man hat also den Satz:

Zerfällt die Polkurve eines Polarsystems in ein Linienpaar, so artet die Polarkurve des adjungierten Polarsystems in ein doppeltzählendes Strahlbüschel aus, dessen Scheitel der Doppelpunkt des Linienpaares ist.

Der zweite Fall, der beim Verschwinden des Produktes $[B_1 B_2 B_3]$ eintreten kann, ist der, wo die sämtlichen drei zweifaktorigen Produkte $[B_2 B_3]$, $[B_3 B_1]$, $[B_1 B_2]$ null sind, wo also die drei Gleichungen bestehen

473) . . . . $[B_2 B_3] = [B_3 B_1] = [B_1 B_2] = 0$,

welche übrigens die Gleichung

474) . . . . $[B_1 B_2 B_3] = 0$

nach sich ziehen.

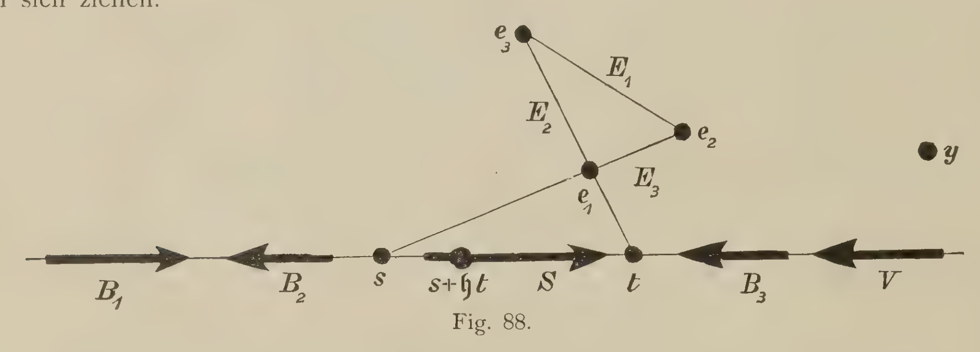


Fig. 88.

Ist dabei wenigstens noch eine von den drei Gröfsen B_i, etwa B_1, von Null verschieden, so werden zwischen den drei Gröfsen B_i zwei Zahlbeziehungen von der Form bestehen müssen

$$B_2 = \mathfrak{f} B_1, \quad B_3 = \mathfrak{g} B_1 \quad \text{oder}$$

475) . . . . $\mathfrak{f} B_1 - B_2 = 0$ und $\mathfrak{g} B_1 - B_3 = 0$.

Diese Gleichungen sagen aus, dafs die drei Stäbe B_1, B_2, B_3, sofern sie nicht null sind, *der nämlichen Geraden angehören* (vgl. Fig. 88).

Bezeichnet man ferner noch die beiden Punkte, die aus den Grundpunkten e_1, e_2, e_3 durch die Koeffizienten der beiden Zahlbeziehungen 475) abgeleitet werden können, mit s und t, setzt also

476) . . . . $s = \mathfrak{f} e_1 - e_2$ und $t = \mathfrak{g} e_1 - e_3$,

so lassen sich die Gleichungen 475) auch in der Form schreiben

477) . . . . $s\boldsymbol{p} = 0$ und $t\boldsymbol{p} = 0$.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst, dafs *die Punkte s und t auf der Geraden der drei Stäbe B_i liegen müssen;* denn es wird

478) .... $\begin{cases} [sB_i] = [s \cdot e_i\boldsymbol{p}] = [e_i \cdot s\boldsymbol{p}] = 0. \\ [tB_i] = [t \cdot e_i\boldsymbol{p}] = [e_i \cdot t\boldsymbol{p}] = 0. \end{cases}$

Ferner zeigen die Gleichungen 477), dafs *die beiden Punkte s und t zum Polarsystem $\boldsymbol{p}$ apolar* sind. Dieselbe Eigenschaft besitzt aber offenbar auch jeder Punkt $s + \mathfrak{h}t$ der Geraden

479) .... $S = [st]$.

In der That folgt aus den Gleichungen 477) für ganz beliebige Werte der Zahlgröfse $\mathfrak{h}$ die Gleichung

480) .... $(s + \mathfrak{h}t)\boldsymbol{p} = 0$,

welche wirklich aussagt, dafs überhaupt *jeder Punkt der Geraden S zum Polarsystem $\boldsymbol{p}$ apolar ist.* Diese Gleichung 480) ist zugleich für die geometrische Deutung der neuen Ausartung des Polarsystems am geeignetsten.

Multipliziert man sie nämlich äufserlich mit dem Punkte $s + \mathfrak{h}t$, so erhält man die Gleichung

481) .... $[(s + \mathfrak{h}t) \cdot (s + \mathfrak{h}t)\boldsymbol{p}] = 0$,

welche besagt:

Jeder Punkt $s + \mathfrak{h}t$ der Geraden $S = [st]$ liegt auf der Polkurve des Polarsystems $\boldsymbol{p}$.

Aber die Gleichung 480) zeigt zugleich, dafs *die Polare eines jeden beliebigen Punktes der Ebene mit der Geraden S zusammenfällt.* In der That, ist V die Polare eines beliebigen Punktes y, also

482) .... $V = y\boldsymbol{p}$,

so folgert man aus der Gleichung 480) unter Benutzung der Grundgleichung 443), dafs das äufsere Produkt $[(s + \mathfrak{h}t) V]$ verschwindet; denn es wird

483) .... $[(s + \mathfrak{h}t) V] = [(s + \mathfrak{h}t) \cdot y\boldsymbol{p}] = [y \cdot (s + \mathfrak{h}t)\boldsymbol{p}] = 0$.

Die Polare V eines beliebigen Punktes y der Ebene geht also durch einen jeden Punkt $s + \mathfrak{h}t$ der Geraden S hindurch und fällt somit wirklich mit der Geraden S zusammen. Die beiden Stäbe V und S können sich daher nur um einen Zahlfaktor von einander unterscheiden, und man kann die Gleichung ansetzen

484) .... $V = y\boldsymbol{p} = \mathfrak{r}_{(y)} S$,

in welcher der Faktor $\mathfrak{r}_{(y)}$ eine vom Punkte y abhängende Zahlfunktion bedeutet. Bildet man insbesondere diejenigen drei Specialgleichungen, die aus der Gleichung 484) hervorgehen, wenn man den Punkt y durch die drei Ecken e_i des Fundamentaldreiecks ersetzt, und bezeichnet die Werte, welche die Funktion $\mathfrak{r}_{(y)}$ für die Argumente e_1, e_2, e_3 annimmt, mit $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, so erhält man die drei Gleichungen

485) .. $B_1 = e_1\boldsymbol{p} = \mathfrak{r}_1 S, \quad B_2 = e_2\boldsymbol{p} = \mathfrak{r}_2 S, \quad B_3 = e_3\boldsymbol{p} = \mathfrak{r}_3 S.$

Die geometrische Bedeutung der hier auftretenden Zahlgröfsen $\mathfrak{r}_i$ ergiebt sich leicht aus den Grundgleichungen des Polarsystems

486) .... $[e_i \cdot e_k\boldsymbol{p}] = [e_k \cdot e_i\boldsymbol{p}]$.

Führt man nämlich in diese Gleichungen anstatt der Produkte

$e_k\boldsymbol{p}$ und $e_i\boldsymbol{p}$ ihre Werte

$\mathfrak{r}_k S$ und $\mathfrak{r}_i S$ aus 485) ein, so bekommt man die Gleichungen

$\mathfrak{r}_k [e_i S] = \mathfrak{r}_i [e_k S]$, für die man, wenn man noch

487) . . . . $S = \mathfrak{S}_1 E_1 + \mathfrak{S}_2 E_2 + \mathfrak{S}_3 E_3$ setzt, auch schreiben kann

488) . . . . $\mathfrak{r}_k \mathfrak{S}_i = \mathfrak{r}_i \mathfrak{S}_k$.

Aus diesen Gleichungen aber folgt die laufende Proportion

$$\mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2 : \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{S}_1 : \mathfrak{S}_2 : \mathfrak{S}_3,$$

welche wiederum gleichbedeutend ist mit den Proportionalitätsgleichungen

489) . . . . $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{k} \mathfrak{S}_i$,

in denen $\mathfrak{k}$ einen konstanten Zahlfaktor bezeichnet. Die Gleichungen 485) verwandeln sich daher in

490) . . . . $B_1 = \mathfrak{k}\, \mathfrak{S}_1 S, \quad B_2 = \mathfrak{k}\, \mathfrak{S}_2 S, \quad B_3 = \mathfrak{k}\, \mathfrak{S}_3 S,$

und es wird also

491) . . . . $p = \mathfrak{k} \dfrac{\mathfrak{S}_1 S, \ \mathfrak{S}_2 S, \ \mathfrak{S}_3 S}{e_1, \quad e_2, \quad e_3}$.

Aus dieser Darstellung des Bruches p kann man zunächst eine Bestätigung dafür ablesen, dafs jeder beliebige Punkt y der Ebene

492) . . . . $y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3$

durch den Bruch p in einen Stab der Geraden S übergeführt wird; denn durch Multiplikation der Gleichungen 492) und 491) erhält man für die Polare yp des Punktes y den Wert

$$yp = \mathfrak{k} (\mathfrak{y}_1 \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{y}_2 \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{y}_3 \mathfrak{S}_3)\, S,$$

oder mit Rücksicht auf 492) und 487) den Ausdruck

493) . . . . $yp = \mathfrak{k} [y S]\, S$,

welcher in der That zeigt, dafs die Polare eines ganz beliebigen Punktes y der Ebene sich nur durch den Zahlfaktor

$$\mathfrak{r}_{(y)} = \mathfrak{k} [y S]$$

von dem Stabe S unterscheidet.

Um ferner die Gestalt der Polkurve

494) . . . . $[x \cdot xp] = 0$

für die neue Ausartung des Polarsystems, das heifst für einen Bruch p, zu ermitteln, dessen Zähler den Gleichungen 473) genügen, multipliziere man die Gleichung

495) . . . . $xp = \mathfrak{k} [x S]\, S$,

die aus 493) durch Substitution von x an Stelle von y hervorgeht, mit x und erhält so für die linke Seite der Gleichung 494) die Darstellung

496) . . . . $[x \cdot xp] = \mathfrak{k} [x S]^2$

und damit den Satz:

Bei der durch die Gleichungen 473) definierten Ausartung eines Polarsystems p ist die seiner Polkurve zugehörende quadratische Form $[x \cdot xp]$ das Produkt aus einer Konstanten und dem Quadrat einer linearen Form.

Die Gleichung der Polkurve nimmt daher die Gestalt an

497) . . . . $[x S]^2 = 0$,

und man hat somit den Satz:

Verschwinden bei einem Polarsysteme p alle drei Produkte aus je zweien von seinen Zählern, so besteht seine Polkurve aus einer doppelt zählenden Geraden; mit dieser Geraden fallen zugleich die Polaren sämtlicher Punkte der Ebene hinsichtlich des Polarsystems p zusammen.

Die adjungierte Verwandtschaft bietet in diesem Falle wenig Interesse. Infolge der Gleichungen 473) nimmt nämlich der Ausdruck für den adjungierten Bruch

498) . . . . $\boldsymbol{P} = \frac{[B_2 B_3],\ [B_3 B_1],\ [B_1 B_2]}{E_1,\quad E_2,\quad E_3}$ die Form an

499) . . . . $\boldsymbol{P} = \frac{0,\quad 0,\quad 0}{E_1,\quad E_2,\quad E_3}$;

und es wird daher überhaupt für jeden beliebigen Stab V der Ebene

500) . . . . $V\boldsymbol{P} = 0$,

das heifst, man hat den Satz:

Artet die Polkurve eines Polarsystems $\mathfrak{p}$ in eine doppelt zählende Gerade aus, so ist zu dem adjungierten Polarsystem $\boldsymbol{P}$ jeder beliebige Stab V der Ebene apolar.

Man gelangt zu den beiden dualistisch entsprechenden Ausartungen des Polarsystems, wenn man von dem Bruche

501) . . . . $\boldsymbol{P} = \frac{b_1,\ b_2,\ b_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$

ausgeht, diesen Bruch aber nicht wie bisher als adjungierten Bruch zu einem primitiven Bruche $\mathfrak{p}$ auffafst, sondern selbst als einen ursprünglichen Bruch behandelt, zu dem erst ein adjungierter Bruch $\overline{\mathfrak{p}}$ gebildet werden soll. Dabei seien im übrigen die bisherigen Bezeichnungen festgehalten. Es seien also die drei Zähler b_i des Bruches $\boldsymbol{P}$ aus den drei Nennerprodukten

502) . . . . $e_1 = [E_2 E_3],\ e_2 = [E_3 E_1],\ e_3 = [E_1 E_2]$

durch neun Ableitzahlen $\mathfrak{B}_{ik}$ abgeleitet, also als Vielfachensummen

503) . . . . $b_i = \mathfrak{B}_{i1} e_1 + \mathfrak{B}_{i2} e_2 + \mathfrak{B}_{i3} e_3$

dargestellt, in denen die $\mathfrak{B}_{ik}$ den Bedingungen genügen

504) . . . . $\mathfrak{B}_{ik} = \mathfrak{B}_{ki}$.

Aus diesen folgt, wie oben gezeigt ist, dafs für beliebige Stäbe V und W die Grundgleichung des Polarsystems besteht

505) . . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = [V \cdot W\boldsymbol{P}]$.

Man setze dann entsprechend der dualistischen Entwickelung voraus, dafs das Produkt der drei Zähler b_i des Bruches $\boldsymbol{P}$, das heifst das Produkt

506) . . . . $[b_1 b_2 b_3] = 0$

ist, und unterscheide auch hier die beiden Unterfälle, wo wenigstens *eins von den drei zweifaktorigen Produkten* $[b_2 b_3]$, $[b_3 b_1]$, $[b_1 b_2]$ *von Null verschieden ist,* und wo *alle drei Produkte gleichzeitig verschwinden.*

Im ersten Falle besteht zwischen den drei Zählern b_i des Bruches $\boldsymbol{P}$ *eine und nur eine* Zahlbeziehung, sie möge lauten:

507) . . . . $\mathfrak{S}_1 b_1 + \mathfrak{S}_2 b_2 + \mathfrak{S}_3 b_3 = 0$

und sagt aus, dafs die drei Punkte b_i einer und derselben Geraden angehören (vgl. Fig. 89).

Bezeichnet man ferner denjenigen Stab, dessen Ableitzahlen die Koeffizienten der Zahlbeziehung 507) sind, mit S, setzt also

508) . . . . $S = \mathfrak{S}_1 E_1 + \mathfrak{S}_2 E_2 + \mathfrak{S}_3 E_3$,

so kann man wegen 501) die Gleichung 507) durch die Gleichung ersetzen

509) . . . . $S\boldsymbol{P} = 0$,

welche den weiteren Folgerungen zu Grunde gelegt werden soll.

Zunächst kann man dieser Gleichung wiederum die Form geben

510) . . . . $S\boldsymbol{P} = 0 \cdot z$,

in der z einen ganz beliebigen Punkt bedeutet, und welche daher aussagt, dafs der Pol des Stabes S hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ unbestimmt bleibt, oder, wie wir sagen wollen, dafs der Stab *S zum Polarsystem $\boldsymbol{P}$ apolar* ist.

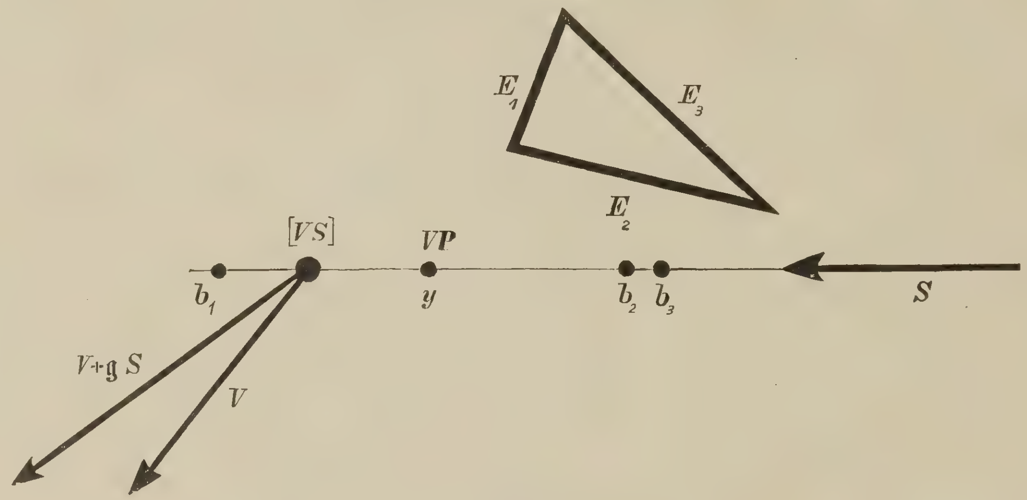


Fig. 89.

Ferner folgt aus der Gleichung 509), dafs *die Gerade S der Polarkurve des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ angehört*, denn der Stab S mufs ja auch der Gleichung genügen

511) . . . . $[S \cdot S\boldsymbol{P}] = 0$.

Aber die Gleichung 509) zeigt zugleich, dafs *die Gerade des Stabes S auch durch alle drei Grundpunkte hindurchgehen mufs.* In der That erhält man mit Rücksicht auf die Grundgleichung 505) für die Produkte $[Sb_i]$ die Darstellung

512) . . . . $[Sb_i] = [S \cdot E_i\boldsymbol{P}] = [E_i \cdot S\boldsymbol{P}] = 0$,

aus der die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung hervorgeht. Aber wie man sofort bemerkt, liegen nicht nur die Pole der Grundstäbe, sondern überhaupt die Pole *sämtlicher* Stäbe der Ebene auf der Geraden des Stabes S. Ist nämlich y der Pol eines ganz beliebigen Stabes V, also

513) . . . . $y = V\boldsymbol{P}$,

so wird wieder das Produkt

514) . . . . $[Sy] = [S \cdot V\boldsymbol{P}] = [V \cdot S\boldsymbol{P}] = 0$.

Sieht man daher davon ab, dafs zufolge der Gleichung 510) jeder beliebige Punkt z der Ebene, wenn man sich ihn mit dem Koeffizienten 0 behaftet denkt, als Pol der Geraden S aufgefafst werden kann, so bleiben als Pole von Geraden der Ebene nur solche Punkte übrig, die auf der Geraden des Stabes S liegen.

Dafür aber gehört dann umgekehrt jedem auf der Geraden S liegenden Punkte y, der einer beliebigen Geraden V der Ebene als Pol zugeordnet ist, für den also die Gleichung besteht

513) . . . . $y = V\boldsymbol{P}$,

als Polare *nicht nur* jene eine Gerade V zu, sondern zugleich auch die sämtlichen Geraden $V + \mathfrak{g} S$ desjenigen Strahlbüschels, das den Schnittpunkt der Geraden V und S zum Scheitel hat. Wegen 509) wird nämlich

515) . . . . . . $(V + \mathfrak{g} S)\boldsymbol{P} = V\boldsymbol{P} + \mathfrak{g} S\boldsymbol{P} = V\boldsymbol{P} = y$,

das heifst, der Punkt y kann als Pol einer jeden Geraden $V + \mathfrak{g} S$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[VS]$ aufgefafst werden.

Um die Gestalt der Polarkurve

516) . . . . $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$

bei der neuen Ausartung des Polarsystems kennen zu lernen, zeige man zunächst in derselben Weise wie bei einem beliebigen Polarsystem, dafs man von jedem Punkte $[VW]$,

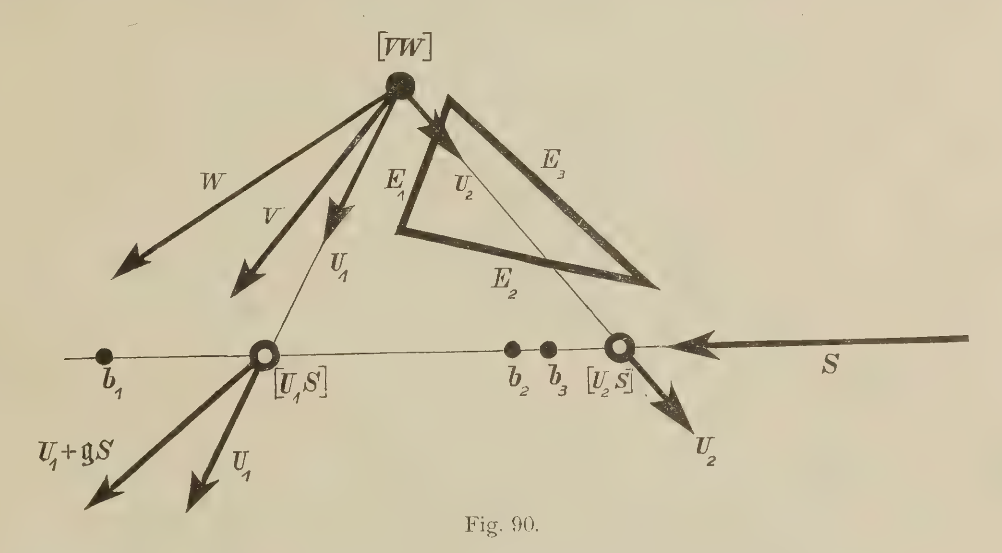


Fig. 90.

der nicht auf der Geraden S liegt (vgl. Fig. 90), zwei Tangenten U_1 und U_2 an die Polarkurve legen kann. Man substituiere dazu wieder in die Gleichung 516) statt U den Ausdruck $V + \mathfrak{h} W$ für einen beliebigen Strahl des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[VW]$ und erhält so die in $\mathfrak{h}$ quadratische Gleichung

517) . . . . . $[V \cdot V\boldsymbol{P}] + 2\mathfrak{h}[W \cdot V\boldsymbol{P}] + \mathfrak{h}^2[W \cdot W\boldsymbol{P}] = 0$.

Sind $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ ihre beiden Wurzeln, so sind

$$U_1 = V + \mathfrak{h}_1 W \quad \text{und} \quad U_2 = V + \mathfrak{h}_2 W$$

die beiden Tangenten, die sich vom Punkte $[VW]$ an die Polarkurve legen lassen, und diese Tangenten können aus demselben Grunde wie bei der dualistischen Entwickelung (vgl. S. 106) auch *nicht in eine einzige Gerade zusammenfallen.*

Dann aber folgt weiter aus der für die Ausartung charakteristischen Gleichung 509), dafs der Polarkurve auch *jede Gerade derjenigen beiden Strahlbüschel angehört, deren Scheitel die Punkte* $[U_1 S]$ *und* $[U_2 S]$ *sind.* Denn jeder Strahl $U_i + \mathfrak{g} S$ $(i = 1, 2)$ eines

dieser beiden Strahlbüschel genügt der Gleichung 516). Setzt man nämlich den Ausdruck $U_i + \mathfrak{g} S$ in die linke Seite von 516) ein, so verwandelt sie sich in die Summe

$$[U_i \cdot U_i \boldsymbol{P}] + 2\mathfrak{g}[U_i \cdot S\boldsymbol{P}] + \mathfrak{g}^2[S \cdot S\boldsymbol{P}];$$

und von dieser verschwinden die beiden letzten Glieder wegen 509), und das erste Glied, weil nach der Voraussetzung die beiden Geraden U_i der Polarkurve angehören. Die Polarkurve wird daher von sämtlichen Geraden der beiden Strahlbüschel berührt, welche die Punkte $[U_1 S]$ und $[U_2 S]$ zu Scheiteln und daher die Gerade S zum Doppelstrahl haben; und da sie von der zweiten Klasse ist, so kann sie aufser den Geraden dieser beiden Strahlbüschel auch keine weiteren Geraden enthalten. Das Umhüllungsgebilde der Geraden der Polarkurve zerfällt daher in das Punktpaar $[U_1 S]$ und $[U_2 S]$, dessen Verbindungslinie die ausgezeichnete Gerade S des Polarsystems ist.

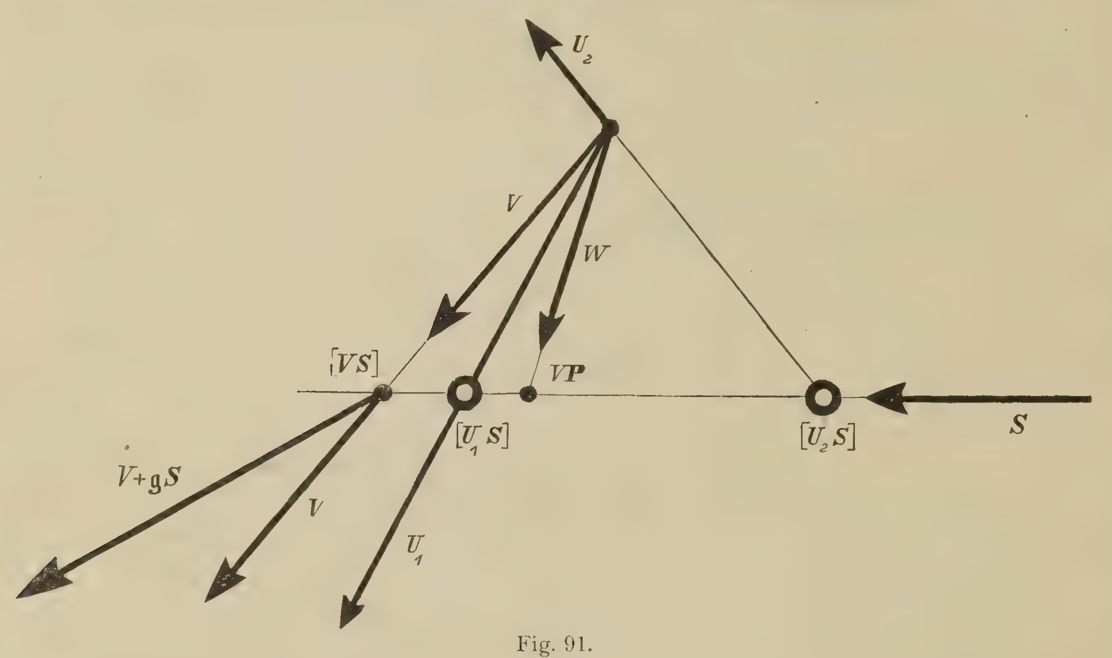


Fig. 91.

Die Parameter $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ der beiden Geraden U_1 und U_2 werden entgegengesetzt gleich, das heifst, der Strahlwurf VWU_1U_2 wird harmonisch (vgl. Fig. 91), wenn der Koeffizient von $\mathfrak{h}$ in der Gleichung 517) verschwindet, wenn also die Gleichung besteht

$$[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0 .$$

Dann geht die Gerade W durch den Pol $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V hindurch, von dem bereits oben gezeigt wurde, dafs er auf der Geraden des Stabes S liegt, und dafs er zugleich einer jeden Geraden $V + \mathfrak{g} S$ als Pol zugeordnet ist, die durch den Schnittpunkt $[VS]$ der Geraden V und S geht. Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich daher in den Satz zusammenfassen:

Verschwindet das äufsere Produkt der drei Zählerpunkte des Bruches $\boldsymbol{P}$, ohne dafs zugleich alle drei Produkte aus je zweien von diesen Punkten null sind, so zerfällt die Polarkurve des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ in ein *Punktpaar.* Die Pole sämtlicher Geraden der Ebene hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ liegen

auf der geraden Verbindungslinie des Punktpaars und werden durch das Punktpaar von ihren Polaren harmonisch getrennt. Umgekehrt kann ein jeder Punkt, der auf der Verbindungslinie des Punktpaars liegt, als Pol *einer jeden* Geraden aufgefafst werden, die von ihm durch das Punktpaar harmonisch getrennt ist, das heifst, die Polare eines solchen Punktes kann in dem Strahlbüschel beliebig gewählt werden, dessen Scheitel jenem Punkte hinsichtlich des Punktpaars harmonisch zugeordnet ist.

Der zu dem Bruche $\boldsymbol{P}$ adjungierte Bruch

518) . . . . $$\overline{\boldsymbol{p}} = \frac{[b_2 b_3],\ [b_3 b_1],\ [b_1 b_2]}{e_1,\ \ e_2,\ \ e_3}$$

läfst sich auf dieselbe Weise umformen wie der Bruch $\boldsymbol{P}$ bei der entsprechenden Ausartung in der dualistischen Entwickelung (vgl. S. 108 f.) und nimmt dadurch die Gestalt an

519) . . . . $$\overline{\boldsymbol{p}} = \mathfrak{k}\,\frac{\mathfrak{S}_1 S,\ \mathfrak{S}_2 S,\ \mathfrak{S}_3 S}{e_1,\ \ e_2,\ \ e_3}$$

in der $\mathfrak{k}$ einen Zahlfaktor bedeutet. Einem beliebigen Punkt der Ebene

520) . . . . $$y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3$$

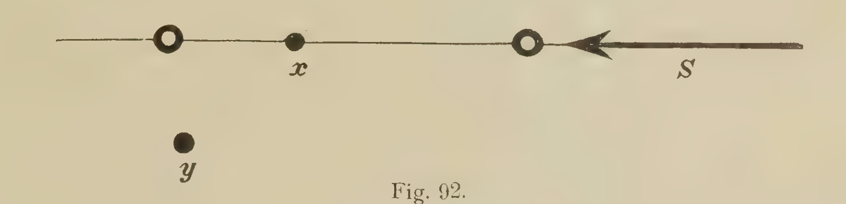


Fig. 92.

(vgl. Fig. 92) wird daher durch den Bruch $\overline{\boldsymbol{p}}$ die Gerade

251) . . . . $$y\overline{\boldsymbol{p}} = \mathfrak{k}\,(\mathfrak{y}_1 \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{y}_2 \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{y}_3 \mathfrak{S}_3)\,S$$

zugewiesen, oder was dasselbe ist, die Gerade

522) . . . . $$y\overline{\boldsymbol{p}} = \mathfrak{k}\,[yS]\,S\,.$$

Diese Darstellung der Polare des Punktes y zeigt, dafs der zu $\boldsymbol{P}$ adjungierte Bruch $\overline{\boldsymbol{p}}$ jedem beliebigen Punkte y der Ebene als Polare die Verbindungslinie S der Punkte des Punktpaars $[U_1 S]$, $[U_2 S]$ zuordnet, was zu dem oben gewonnenen Ergebnisse stimmt, dafs der Pol der Geraden S in Bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{P}$ unbestimmt bleibt. Nur in dem Falle, wo der Punkt y auf der Geraden S liegt, reduciert sich die Gleichung 522) auf die Form

523) . . . . $$y\overline{\boldsymbol{p}} = 0\,;$$

in diesem Falle sagt sie daher aus, dafs die Polare des Punktes y unbestimmt wird. Man hat also den Satz:

Zerfällt die Polarkurve eines Polarsystems $\boldsymbol{P}$ in ein Punktpaar mit der Verbindungsgeraden S, so sind die Punkte dieser Verbindungsgeraden zu dem adjungierten Polarsystem $\overline{\boldsymbol{p}}$ apolar.

Überdies zeigt der Vergleich der Gleichungen 519) und 491), dafs der Bruch $\overline{\boldsymbol{p}}$ genau mit demjenigen Bruche $\boldsymbol{p}$ übereinstimmt, der sich oben in der dualistischen Entwickelung bei der Untersuchung der *zweiten* Ausartung des Polarsystems ergab, und man kann daher zu den bisher gewonnenen Eigenschaften der Verwandtschaft $\overline{\boldsymbol{p}}$ noch das

dort gefundene Ergebnis hinzufügen: Die quadratische Form, welche der Polkurve des Polarsystems $\bar{p}$ zugehört, gestattet die Darstellung

524) $$[x \cdot x\bar{p}] = \mathfrak{k}[xS]^2.$$

Die Gleichung der Polkurve lautet daher

525) $$[xS]^2 = 0$$

und stellt somit die doppelt zu zählende Gerade S dar. Hierin liegt der Satz:

Zerfällt die Polarkurve eines Polarsystems $\boldsymbol{P}$ in ein Punktpaar, so artet die Polkurve des adjungierten Polarsystems $\bar{p}$ in die doppelt zählende Verbindungsgerade der Punkte dieses Punktpaars aus.

Der zweite Fall endlich, der beim Verschwinden des Produktes $[b_1 b_2 b_3]$ eintreten kann, ist wieder der, wo die sämtlichen zweifaktorigen Produkte $[b_2 b_3]$, $[b_3 b_1]$, $[b_1 b_2]$ null sind, wo also die drei Gleichungen bestehen

526) $$[b_2 b_3] = [b_3 b_1] = [b_1 b_2] = 0,$$

aus denen dann schon die Gleichung

527) $$[b_1 b_2 b_3] = 0$$

folgt. Ist dabei wenigstens noch eine von den drei Gröfsen b_i, etwa b_1 von Null verschieden, so werden zwischen den drei Gröfsen b_i zwei Zahlbeziehungen von der Form bestehen müssen

$$b_2 = \mathfrak{f} b_1 \quad \text{und} \quad b_3 = \mathfrak{g} b_1 \quad \text{oder}$$

528) $$\mathfrak{f} b_1 - b_2 = 0 \text{ und } \mathfrak{g} b_1 - b_3 = 0,$$

welche aussagen, dafs die drei Punkte b_i, sofern sie nicht null sind, *in einen Punkt zusammenfallen* (vgl. Fig. 93).

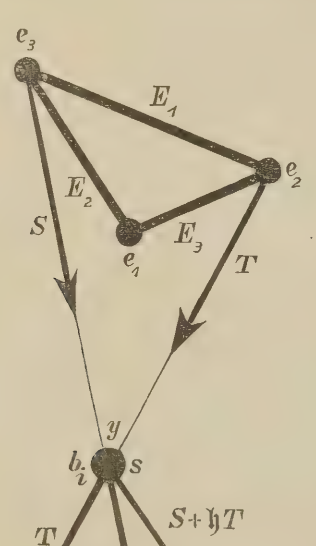


Fig. 93.

Bezeichnet man dann wieder die beiden Stäbe, die aus den Grundstäben E_1, E_2, E_3 durch die Koeffizienten der beiden Zahlbeziehungen 528) abgeleitet werden können, mit S und T, setzt also

529) $$S = \mathfrak{f} E_1 - E_2 \text{ und } T = \mathfrak{g} E_1 - E_3,$$

so lassen sich die Gleichungen 528) auch in der Form schreiben

530) $$S\boldsymbol{P} = 0 \text{ und } T\boldsymbol{P} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst, dafs *die Geraden der Stäbe S und T durch denjenigen Punkt hindurchgehen müssen, in den die drei Punkte b_i zusammengefallen sind.* Denn es wird

531) $$\begin{cases} [Sb_i] = [S \cdot E_i\boldsymbol{P}] = [E_i \cdot S\boldsymbol{P}] = 0 \\ [Tb_i] = [T \cdot E_i\boldsymbol{P}] = [E_i \cdot T\boldsymbol{P}] = 0. \end{cases}$$

Ferner zeigen sie, dafs *die Geraden S und T zum Polarsystem $\boldsymbol{P}$ apolar* sind. Dieselbe Eigenschaft besitzt aber offenbar auch jede Gerade $S + \mathfrak{h} T$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel

532) $$s = [ST].$$

In der That folgt aus den Gleichungen 531) für ganz beliebige Werte der Zahlgröfse $\mathfrak{h}$ die Gleichung

533) $$(S + \mathfrak{h} T)\boldsymbol{P} = 0,$$

welche wirklich aussagt, dafs überhaupt *jede Gerade des Strahlbüschels mit dem Scheitel s zum Polarsystem $\boldsymbol{P}$ apolar ist.* An diese Gleichung 533) lassen sich wiederum am leichtesten die weiteren Folgerungen knüpfen.

Multipliziert man sie zunächst äufserlich mit dem Stabe $S + \mathfrak{h} T$, so erhält man die Gleichung

534) . . . . $[(S + \mathfrak{h} T) \cdot (S + \mathfrak{h} T) \boldsymbol{P}] = 0,$

welche den Satz enthält:

Jede Gerade $S + \mathfrak{h} T$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel $s = [ST]$ gehört der Polarkurve des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ an.

Aber die Gleichung 533) zeigt zugleich, dafs *der Pol eines jeden beliebigen Stabes der Ebene mit dem Punkte s zusammenfällt.* In der That, ist y der Pol eines beliebigen Stabes V, also

535) . . . . $y = V \boldsymbol{P},$

so folgert man aus der Gleichung 533) unter Benutzung von 505), dafs das äufsere Produkt $[(S + \mathfrak{h} T) y]$ verschwindet; denn es wird

536) . . . $[(S + \mathfrak{h} T) y] = [(S + \mathfrak{h} T) \cdot V \boldsymbol{P}] = [V \cdot (S + \mathfrak{h} T) \boldsymbol{P}] = 0.$

Der Pol y einer beliebigen Geraden V der Ebene liegt also auf einer jeden Geraden $S + \mathfrak{h} T$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel s und fällt somit wirklich mit dem Punkte s zusammen. Die beiden Punkte y und s können sich daher nur um einen Zahlfaktor von einander unterscheiden, und man kann die Gleichung ansetzen

537) . . . . $y = V \boldsymbol{P} = \mathfrak{r}_{(V)} s,$

wo $\mathfrak{r}_{(V)}$ eine Zahlfunktion bedeutet, die von dem Stabe V abhängt. Bildet man insbesondere diejenigen drei Specialgleichungen, die aus der Gleichung 537) hervorgehen, wenn man den Stab V durch die drei Grundstäbe E_i des Fundamentaldreiecks ersetzt, und bezeichnet die Werte, welche die Funktion $\mathfrak{r}_{(V)}$ für die Argumente E_1, E_2, E_3 annimmt, mit $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, so erhält man die drei Gleichungen

538) . . . . $b_1 = E_1 \boldsymbol{P} = \mathfrak{r}_1 s, \;\; b_2 = E_2 \boldsymbol{P} = \mathfrak{r}_2 s, \;\; b_3 = E_3 \boldsymbol{P} = \mathfrak{r}_3 s.$

Die geometrische Bedeutung der hier auftretenden Zahlgröfsen $\mathfrak{r}_i$ ergiebt sich wieder leicht aus der Grundgleichung des Polarsystems

539) . . . . $[E_i \cdot E_k \boldsymbol{P}] = [E_k \cdot E_i \boldsymbol{P}].$

Führt man nämlich in diese Gleichung anstatt der Produkte

$E_k \boldsymbol{P}$ und $E_i \boldsymbol{P}$ ihre Werte

$\mathfrak{r}_k s$ und $\mathfrak{r}_i s$ aus 538) ein, so erhält man

$\mathfrak{r}_k [E_i s] = \mathfrak{r}_i [E_k s]$, für die man, wenn man noch

540) . . . . $s = \mathfrak{s}_1 e_1 + \mathfrak{s}_2 e_2 + \mathfrak{s}_3 e_3$ setzt, auch schreiben kann

541) . . . . $\mathfrak{r}_k \mathfrak{s}_i = \mathfrak{r}_i \mathfrak{s}_k.$

Und diese drei Produktengleichungen lassen sich wieder durch die Proportionalitätsgleichungen ersetzen

542) . . . . $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{k} \mathfrak{s}_i,$

in denen $\mathfrak{k}$ einen konstanten Zahlfaktor bedeutet. Die Gleichungen 538) verwandeln sich daher in

543) . . . . . . $b_1 = \mathfrak{k} \, \mathfrak{s}_1 s, \;\; b_2 = \mathfrak{k} \, \mathfrak{s}_2 s, \;\; b_3 = \mathfrak{k} \, \mathfrak{s}_3 s,$

und es wird also

544) . . . . $\boldsymbol{P} = \mathfrak{k} \dfrac{\mathfrak{s}_1 s, \;\; \mathfrak{s}_2 s, \;\; \mathfrak{s}_3 s}{E_1, \;\; E_2, \;\; E_3}.$

Aus dieser Form des Bruches $\boldsymbol{P}$ folgt dann wieder wie bei der dualistischen Entwickelung für den Pol $V\boldsymbol{P}$ eines beliebigen Stabes V der Ausdruck

545) . . . . $V\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}[Vs]s,$

und man erhält zugleich für die der Polarkurve zugehörige quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{P}]$ die Darstellung

546) . . . . $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = \mathfrak{k}[Us]^2$

und damit den Satz:

Bei der durch die Gleichungen 526) definierten Ausartung des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ ist die seiner Polarkurve zugehörende quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{P}]$ das Produkt aus einer Konstanten und dem Quadrat einer linearen Form.

Die Gleichung der Polkurve läfst sich daher auch in der Form schreiben:

547) . . . . $[Us]^2 = 0,$

und es ergiebt sich also der Satz:

Verschwinden bei einem Polarsystem $\boldsymbol{P}$ alle drei Produkte aus je zweien von seinen drei Zählern, so besteht seine Polarkurve aus einem doppeltzählenden Punkt. Mit diesem Punkte fallen zugleich die Pole sämtlicher Geraden der Ebene hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ zusammen.

Die adjungierte Verwandtschaft bietet auch hier wenig Interesse. Denn der adjungierte Bruch $\overline{\boldsymbol{p}}$ nimmt wegen 526) die Form an:

548) . . . . $\overline{\boldsymbol{p}} = \dfrac{0,\ 0,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3}.$

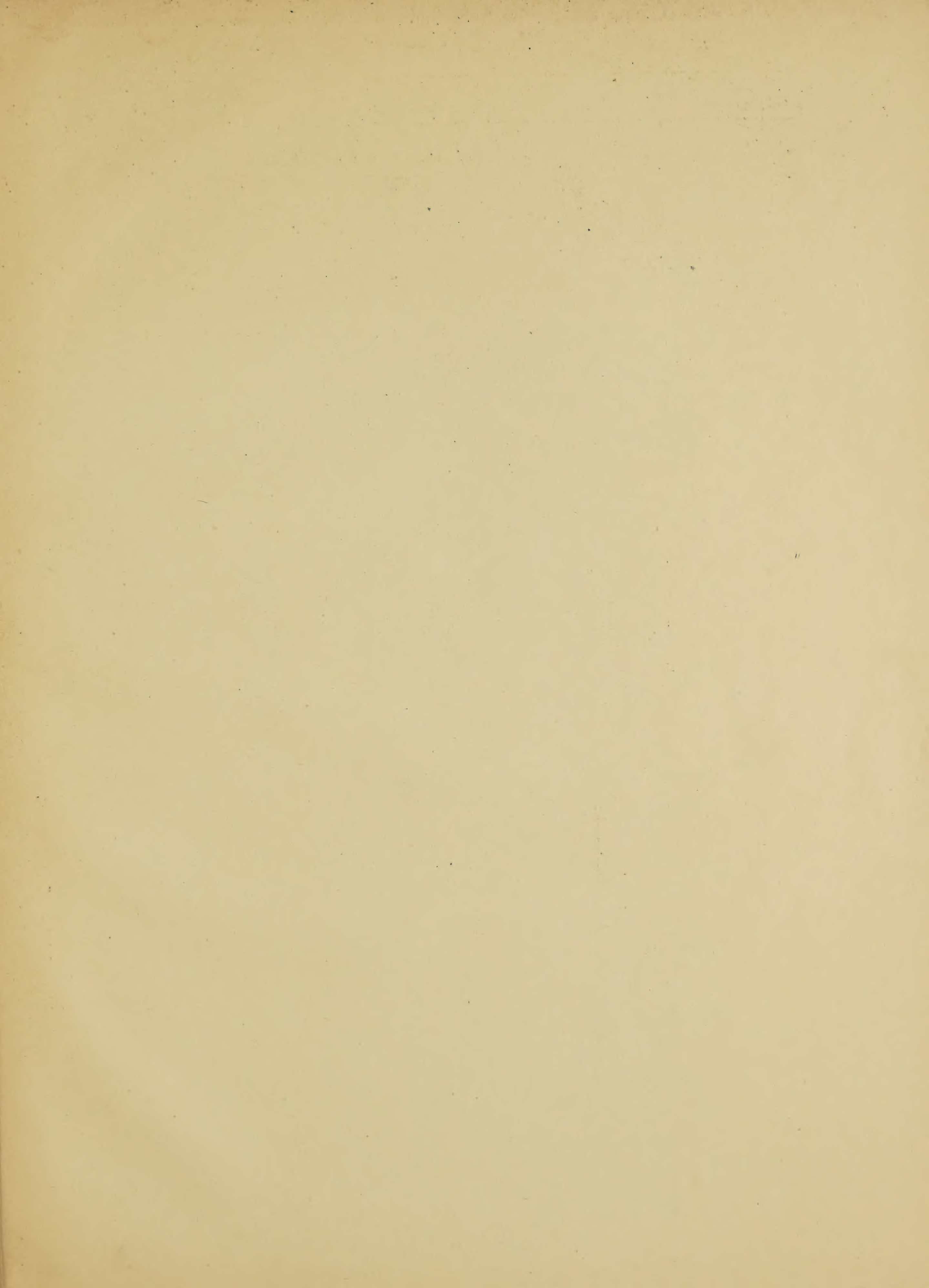
Es wird daher überhaupt für jeden Punkt y der Ebene das Produkt

549) . . . . $y\overline{\boldsymbol{p}} = 0,$

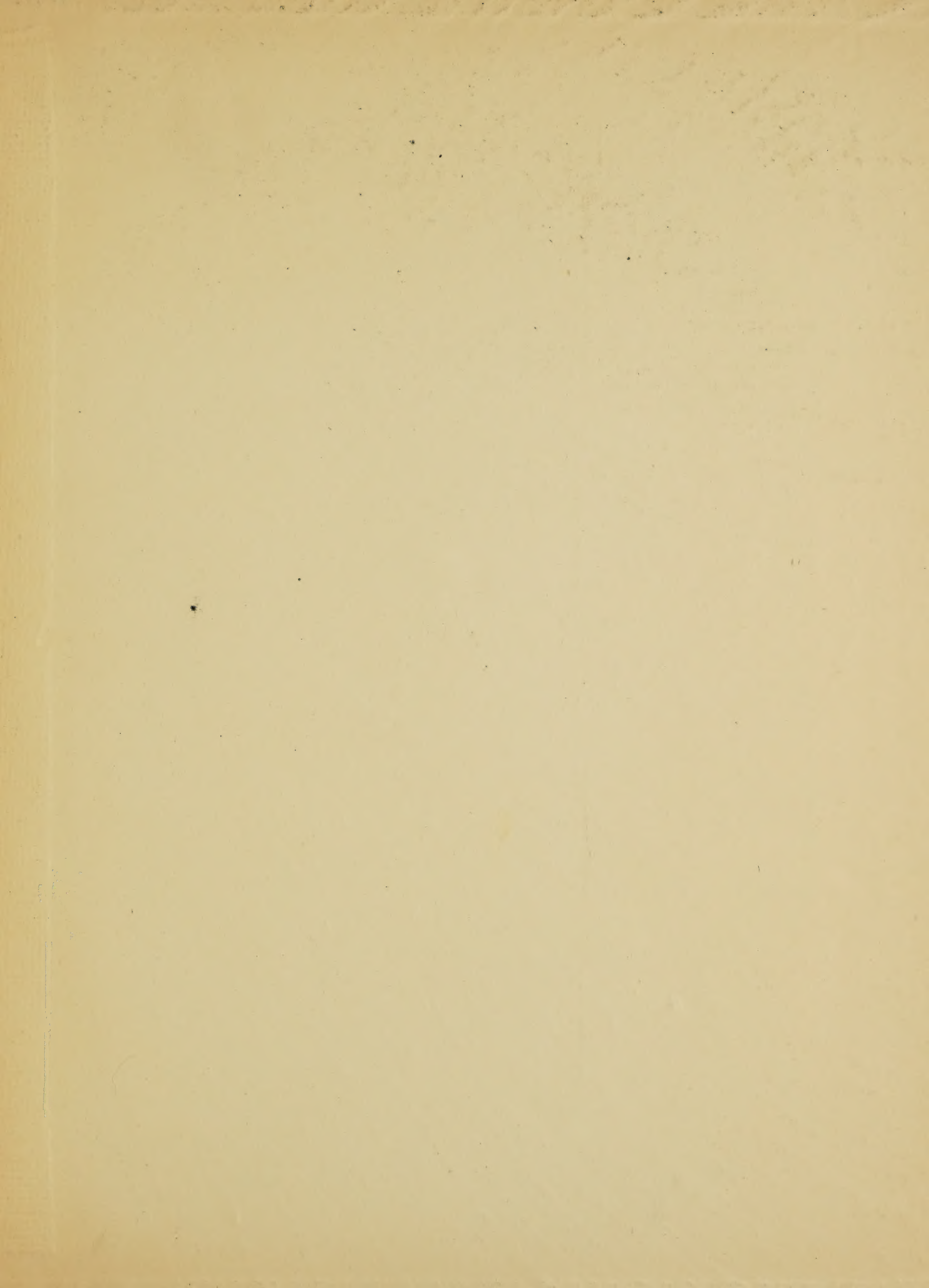
das heifst, man hat den Satz:

Artet die Polkurve eines Polarsystems $\boldsymbol{P}$ in ein doppeltzählendes Strahlbüschel aus, so ist zu dem adjungierten Polarsystem $\overline{\boldsymbol{p}}$ jeder beliebige Punkt y der Ebene apolar.

(Fortsetzung folgt.)







UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.4G76P C001
PUNKTRECHNUNG UND PROJEKTIVE GEOMETRIE
3 0112 017048270